Министерство образования Тверской области

Тверской колледж имени А.Н. Коняева

«Множества»

Учебно-методическое пособие по предмету «Математика»

Тверь,

2009

Учебно-методическое пособие содержит теоретический и практический материал по теме «Множества». Пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплины «Математика», «Дискретная математика», а также может быть полезно преподавателям математики.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Теоретико-множественные понятия встречаются практически во всех разделах современной математики и составляют ее фундамент. Теоретико-множественный подход способствует развитию общей культуры студентов, помогает видеть связи между явлениями. Таким образом, теоретико-множественный подход при изучении курса математики создает благоприятные условия для целенаправленного изучения языка математики, способствует повышению научности и четкости в изложении материала, содействует выявлению связей между различными разделами математики, помогает развитию математической культуры студентов.

Основным средством формирования теоретико-множественных понятий и их применения при изучении программного материала является специальный подбор системы упражнений и задач. Предлагаемое пособие по теме «Множества» содержит как теоретический, так и практический материал. Рассматриваемая система упражнений рассчитана на овладение студентами общими методами рассуждений, активизацию их мыслительной деятельности, выработку творческого подхода к решению задач, установление связи теоретико-множественных понятий с окружающей действительностью.

1. Основные понятия теории множеств

Понятия множество, элементы множества – одни из основных неопределяемых понятий современной математики.

Под множеством (семейством, набором, ансамблем) понимается совокупность объектов, объединенных некоторым признаком, свойством. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами.

Пример 1.1. $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ - множество натуральных чисел, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ - множество целых чисел,

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, \ \mathrm{n} \in \mathrm{N} \right\}$ - множество рациональных чисел, $R = \{a_0, a_1 a_2 \ldots \mid a_0 \in Z, \ a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$ - множество действительных чисел.

Запись $a \in M$ означает, что элемент a принадлежит множеству M.

Запись $a \notin M$ означает, что элемент a не принадлежит множеству M.

Для обозначения множеств будем применять прописные буквы латинского алфавита, а элементов – строчные буквы латинского алфавита.

Способы задания множества:

1. Перечислением, то есть $M = \{m_1, \ m_2, \ m_3, \ldots, m_k\}$.
2. Указанием свойства, которым обладают элементы, принадлежащие этому множеству. Данное свойство называется характеристическим. Множество записывается следующим образом:

$M = \{m \mid P(m)\}$, $P(m)$ - характеристическое свойство.

Пример 1.2. $M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ - множество цифр, $M_2 = \{x \mid x > 0, \ \mathrm{x} \in \mathrm{Z}\}$.

Определение 1.1. Множество называется пустым, если оно не содержит ни одного элемента. Обозначение - Ø.

Определение 1.2. Множество X называется подмножеством множества Y, если всякий элемент множества X является элементом множества Y. Обозначение - $X \subseteq Y$.

Определение 1.3. Универсальным называют множество U, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Определение 1.4. Множества X и Y называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Определение 1.5. Мощность множества X - это число элементов множества X. Обозначение - $|X|$.

2. Изображение множеств

Множества принято изображать с помощью *кругов Эйлера-Венна.* Элементы множества изображаются точками внутри круга, если они принадлежат множеству, и точками вне круга, если они не принадлежат множеству. Тот факт, что X является подмножеством Y, с помощью кругов Эйлера-Венна изображается следующим образом (рисунок 2.1).

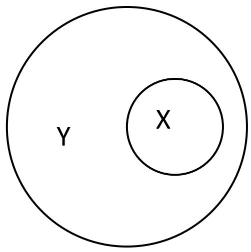

Рисунок 2.1. Иллюстрация кругами Эйлера-Венна

3. Операции над множествами

1. Под объединением двух множеств X и Y (обозначение $X \cup Y$) понимается множество тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X и Y (рисунок 3.1).

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$$

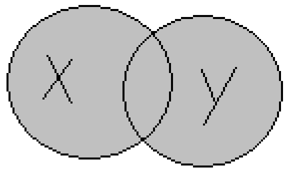

Рисунок 3.1. Объединение множеств

Пример 3.1. Даны множества $X = \{4, 6, 8, 9\}$ и $Y = \{6, 10, 11, 15\}$. Тогда объединение этих множеств: $X \cup Y = \{4, 6, 8, 9, 10, 11, 15\}$.

2. Под пересечением двух множеств X и Y (обозначение $X \cap Y$) понимается множество тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно множествам X и Y (рисунок 3.2.).

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}$$

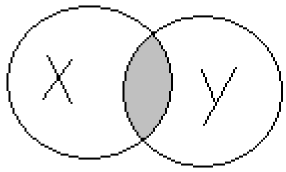

Рисунок 3.2. Пересечение множеств

Пример 3.2. Даны множества $X = \{4, 6, 8, 9\}$ и $Y = \{6, 10, 11, 15\}$. Тогда пересечение этих множеств: $X \cap Y = \{6\}$.

3. Разностью множеств X и Y (обозначение $X \setminus Y$) называется множество тех и только тех элементов X, которые не принадлежат множеству Y (рисунок 3.3.).

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \ \text{и} \ x \notin Y\}$$

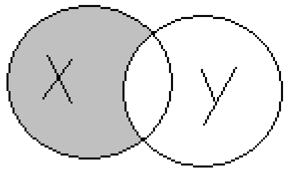

Рисунок 3.3. Разность множеств

Пример 3.3. Даны множества $X = \{4, 6, 8, 9\}$ и $Y = \{6, 10, 11, 15\}$. Тогда разность этих множеств: $X \setminus Y = \{4, 8, 9\}$.

4. Симметрической разностью множеств X и Y (обозначения $X \Delta Y$ или $X \oplus Y$) называется множество тех и только тех элементов, которые принадлежат одному из множеств, но не являются общими элементами (рисунок 3.4.).

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

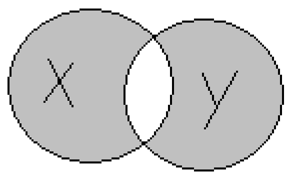

Рисунок 3.4. Симметрическая разность множеств

Пример 3.4. Даны множества $X = \{4, 6, 8, 9\}$ и $Y = \{6, 10, 11, 15\}$. Тогда симметрическая разность этих множеств: $X \Delta Y = \{4, 8, 9, 10, 11, 15\}$.

5. Дополнением к множеству X (обозначение $\overline{X}$) называется множество тех и только тех элементов, которые не принадлежат множеству X, то есть дополняют его до универсального множества (рисунок 3.5.).

$$\overline{X} = U \setminus X$$

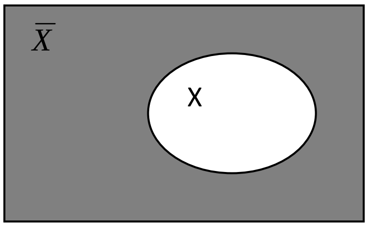

Рисунок 3.5. Дополнение к множеству X

4. Основные свойства операций над множествами

1. Коммутативные законы (переместительные)

$$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X$$

2. Ассоциативные законы (сочетательные)

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

3. Дистрибутивные законы (распределительные)

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z), \quad (X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

4. Законы поглощения

$$X \cup (X \cap Y) = X, \quad X \cap (X \cup Y) = X$$

5. Законы идемпотентности

$$X \cup X = X, \quad X \cap X = X$$

6. Свойства разности

$$X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y,$$

$$X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z),$$

$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

7. Свойства дополнения $\overline{\overline{X}} = X$,

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y},$$

$$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$$

5. Примеры решения задач

1. Определить мощность множества $X = \{x \mid x^2 - 3x - 10 = 0,\ x \in \mathrm{R}\}$.

   Решение. Элементами данного множества являются корни квадратного уравнения $x^2 - 3x - 10 = 0$, дискриминант уравнения больше нуля, следовательно, уравнение имеет два корня. Тогда $|X| = 2$.

2. Доказать, что для любых множеств X, Y, Z выполняется свойство $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.

   Доказательство. Если $a \in X \setminus (Y \cup Z)$, то $a \in X$ и $a \notin (Y \cup Z)$, но тогда $a \notin Y$ и $a \notin Z$. Следовательно, $a \in X \setminus Y$ и $a \in X \setminus Z$. Поэтому $a \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.

   Если $a \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$, то $a \in (X \setminus Y)$ и $a \in (X \setminus Z)$. Следовательно, $a \in X$, $a \notin Y$ и $a \notin Z$. Но тогда $a \notin (Y \cup Z)$ и $a \in X \setminus (Y \cup Z)$.

   Таким образом, мы доказали, что эти множества совпадают.

3. Доказать, что для любых множеств X, Y, Z выполняется закон $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

   Доказательство. Пусть элемент $x \in (X \cup Y) \cap Z$. Следовательно, элемент x входит в Z и, кроме того, по крайней мере, в одной из множеств X или Y. Но тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $X \cap Z$ или $Y \cap Z$, то есть $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

   Обратно, если $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$, то $x \in X \cap Z$ или $x \in Y \cap Z$, следовательно, $x \in Z$ и, кроме того, $x \in X$ или $x \in Y$, то есть $x \in X \cup Y$. Таким образом, $x \in (X \cup Y) \cap Z$.

   Так как любой элемент x левой части входит в правую и наоборот, то эти множества совпадают.

4. Пятьдесят лучших студентов колледжа наградили за успехи поездкой в Англию и Германию. Из них 5 не владели ни одним разговорным иностранным языком, 34 знали английский язык и 27 – немецкий. Сколько студентов владели двумя разговорными иностранными языками?

   Решение. Введём обозначения множеств:

   E - множество студентов, не владеющих ни одним иностранным языком, $|E| = 5$;

   A - множество всех студентов, $|A| = 50$;

   B - множество студентов, владеющих английским языком, $|B| = 34$;

   C - множество студентов, владеющих немецким языком, $|C| = 27$;

   D - множество студентов, владеющих английским и немецким языками, $|D| = x$. Найдем $|D|$ из уравнения $|B| + |C| - |D| = |A| - |E|$ или 34+27-x=50-5, отсюда $x = 16$.

6. Задачи для самостоятельного решения

1. Укажите множество действительных чисел, соответствующее записи:

   a. $A = \{x \mid 5x - 4 > 0\};$

   b. $B = \{x \mid x^2 + 2x + 1 = 0\};$

   c. $C = \{x \mid -4 \le x < 8,\ \mathrm{x} \in Z\};$

   d. $X = \{x \mid x^2 - 3x - 4 \le 0\}.$

2. Изобразить на координатной прямой множество X, если

   a. $X = \{x \mid x \in R \text{ и } -2 \le \mathrm{x} < 7\};$

   b. $X = \{x \mid x \in Z \text{ и } -2 \le \mathrm{x} \le 7\};$

   c. $X = \{x \mid x \in R \text{ и } \mathrm{x} < 7\};$

   d. $X = \{x \mid x \in R \text{ и } \mathrm{x} \ge -2\};$

3. Укажите три элемента множества:

   a. $M = \{n^2 + 1 \mid n \in N\};$

   b. $X = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\};$

   c. $Y = \left\{\frac{1}{n-1} \mid n \in N\right\};$

   d. $Z = \left\{\frac{1}{n^2+3} \mid n \in N\right\}.$

4. Задайте характеристическим свойством множество:

   a. Всех параллелограммов;

   b. Всех прямоугольников;

   c. Всех квадратов;

   d. Всех равнобедренных треугольников;

   e. Всех ромбов;

   f. Всех прямоугольных треугольников.

5. Даны промежутки $A = [-4;\ 5]$, $B = (2;\ 6]$, $C = (6;\ 10]$. Найдите следующие множества:

   a. $(A \cup B) \cup C$;

   b. $(A \cap B) \cup C$;

   c. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

   d. $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$;

   e. $(A \cup C) \setminus (A \cap B)$;

6. Выполните действия и определите мощность полученного множества:

   a. $A = \{5,\ 7,\ 9\} \cup \{12,\ 15\}$;

   b. $A = \{5,\ 7,\ 9\} \cap \{12,\ 15,\ 5\}$;

   c. $A = \{1,\ 2,\ 3\} \setminus \{2,\ 3\}$;

   d. $A = \{1,\ 2,\ 3\} \setminus \{4,\ 5\}$.

7. Из 35 студентов, побывавших на каникулах в Москве, все, кроме двоих, делились впечатлениями. О посещении Большого театра с восторгом вспоминали 12 человек, Кремля – 14, а 16 – о концерте, по три студента запомнили посещение театра и Кремля, а также театра и концерта, а четверо – концерта и пребывания в Кремле. Сколько студентов сохранили воспоминания одновременно о театре, концерте и Кремле?

8. Каждый студент группы программистов занимается в свободное время либо в НСО, либо спортом. Сколько студентов в группе, если 23 увлекаются спортом, 12 занимаются в НСО, а 7 совмещают занятия в НСО и увлечение спортом?

9. Докажите свойства объединения и пересечения множеств.

После выполнения всех заданий данного пособия можно предложить студентам пройти тест (приложение А) для проверки усвоения материала.

Приложение А

Тест № 1 (1 – вариант)

Тема: «Множества»

Вопрос № 1. Запись $a \in M$ означает:

а) a принадлежит множеству M;

б) a не принадлежит множеству M;

в) a подмножество множества M;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 2. Множество считается заданным, если:

а) перечислены все его элементы;

б) указано свойство, которым обладают элементы, принадлежащие множеству;

в) нет верного ответа.

Вопрос № 3. Множество целых чисел принято обозначать:

а) N;

б) Z;

в) Q;

г) R.

Вопрос № 4. Множество принято изображать с помощью:

а) кругов Эйлера-Венна;

б) кругов Гаусса;

в) кругов Крамера;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 5. Мощность множества – это:

а) число подмножеств данного множества;

б) число элементов данного множества;

в) число равных множеств данному множеству;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 6. Множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно множествам A и B, называется:

а) пересечением множеств A и B;

б) объединением множеств A и B;

в) разностью множеств A и B;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 7. Даны множества: $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,7,3,8\}$ и $C=\{2,3\}$. C - это:

а) пересечением множеств A и B;

б) объединением множеств A и B;

в) разностью множеств A и B;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 8. Пустым называется множество:

а) состоящее из нулевого элемента;

б) не содержащее элементов;

в) содержащее один элемент;

г) нет верного ответа.

Тест № 1 (2 - вариант)

Тема: «Множества»

Вопрос № 1. Запись $\{a\} \subseteq M$ означает:

а) $\{a\}$ принадлежит множеству M;

б) $\{a\}$ не принадлежит множеству M;

в) $\{a\}$ подмножество множества M;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 2. Множество считается заданным, если:

а) перечислены все его элементы;

б) указано свойство, которым обладают элементы, принадлежащие множеству;

в) нет верного ответа.

Вопрос № 3. Множество натуральных чисел принято обозначать:

а) N;

б) Z;

в) Q;

г) R.

Вопрос № 4. Множество принято изображать с помощью:

а) кругов Эйлера-Венна;

б) кругов Гаусса;

в) кругов Крамера;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 5. Мощность множества – это:

а) число подмножеств данного множества;

б) число элементов данного множества;

в) число равных множеств данному множеству;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 6. Множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется:

а) пересечением множеств A и B;

б) объединением множеств A и B;

в) разностью множеств A и B;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 7. Даны множества: $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,7,3,8\}$ и $C=\{1,2,3,4,5,7,8\}$. C - это:

а) пересечением множеств A и B;

б) объединением множеств A и B;

в) разностью множеств A и B;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 8. Пустым называется множество:

а) состоящее из нулевого элемента;

б) не содержащее элементов;

в) содержащее один элемент;

г) нет верного ответа.

Тест № 1 (3 – вариант)

Тема: «Множества»

Вопрос № 1. Запись $a \in M$ означает:

а) a принадлежит множеству M;

б) a не принадлежит множеству M;

в) a подмножество множества M;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 2. Множество считается заданным, если:

а) перечислены все его элементы;

б) указано свойство, которым обладают элементы, принадлежащие множеству;

в) нет верного ответа.

Вопрос № 3. Множество рациональных чисел принято обозначать:

а) N;

б) Z;

в) Q;

г) R.

Вопрос № 4. Множество принято изображать с помощью:

а) кругов Эйлера-Венна;

б) кругов Гаусса;

в) кругов Крамера;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 5. Мощность множества – это:

а) число подмножеств данного множества;

б) число элементов данного множества;

в) число равных множеств данному множеству;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 6. Множество, состоящее из тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, называется:

а) пересечением множеств A и B;

б) объединением множеств A и B;

в) разностью множеств A и B;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 7. Даны множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 7, 3, 8\}$ и $C = \{1, 4, 5\}$. C - это:

а) пересечением множеств A и B;

б) объединением множеств A и B;

в) разностью множеств A и B;

г) нет верного ответа.

Вопрос № 8. Пустым называется множество:

а) состоящее из нулевого элемента;

б) не содержащее элементов;

в) содержащее один элемент;

г) нет верного ответа.

Список литературы

1. Дадаян А.А. Сборник задач по математике. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007. – 352 с.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1984.
3. Спирина М.С. Дискретная математика. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 368 с.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высш. школа, 2002.