

Министерство образования Тверской области
ГБОУ СПО Тверской колледж им. А.Н. Коняева

Методическая разработка
для организации самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»

Преподаватель:
Сергиенко Н.А.

Тверь
2012

Содержание

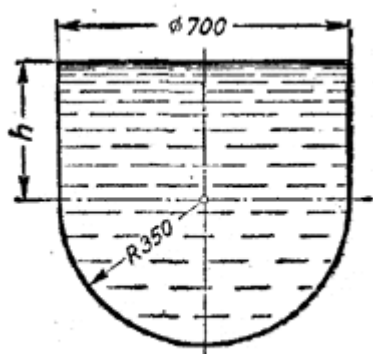
- 1 Шар. Объем шара и его частей
- 2 Решение задач по цилиндру
- 3 Тест по призме
- 4 Пирамида
- 5 Призма, параллелепипед, куб
- 6 Матрицы
- 7 Конус
- 8 Интегралы
- 9 Задачи по пирамиде
- 10 Объем шара и его частей
- 11 Задачи по стереометрии
- 12 Векторы
- 13 Производные
- 14 Задачи на призму

1 Объём шара и его частей

Шар.

1. (Устно.) 1) Радиус шара 1 м. Найти объём шара.
- 2) Во сколько раз увеличится объём шара, если радиус его увеличить в 3 раза? в 4 раза?
2. Чугунные шары регулятора весят каждый 10 кг. Найти диаметр каждого шара. Удельный вес чугуна 7,2.
3. 1) Требуется перелить в один шар два чугунных шара с диаметрами $d_1 = 25$ см и $d_2 = 35$ см. Найти диаметр нового шара. (Угар во внимание не принимается.)
- 2) Радиусы трёх шаров: 3 см, 4 см и 5 см. Определить радиус шара, объём которого равен сумме их объёмов.
4. Имеется кусок свинца весом в 1 кг. Сколько шариков диаметром в 1 см можно отлить из куска? Удельный вес свинца 11,4.
5. (Устно.) 1) Свинцовый шар, диаметр которого 20 см, переливается в шарики с диаметром в 10 раз меньшим. Сколько таких шариков получится? Какое данное в задаче лишнее?
- 2) Нужно отлить свинцовый шар с диаметром в 3 см. Имеются свинцовые шарики с диаметром в 5 мм. Сколько таких шариков нужно взять?
6. Свинцовый шарик, диаметр которого равен 0,012 м, и полый стеклянный шар с диаметром в 0,160 м уравновешены на коромысле весов, т. е. в воздухе имеют равный вес. Если перенести всю эту систему под колокол воздушного насоса и выкачать из-под колокола весь воздух, то какой шар опустится и как велика будет разница в весе шаров? Прибор этот в физике называется бароскопом. Удельный вес воздуха 0,0013.
7. 1) Из деревянного цилиндра, в котором высота равна диаметру основания (равносторонний цилиндр), выточен наибольший шар. Определить, сколько процентов материала сточено.
- 2) Из куба выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?
8. Если радиусы трёх шаров относятся как 1 : 2 : 3, то объём большего шара в три раза больше суммы объёмов меньших шаров. Доказать.
9. Внешний диаметр полого шара 18 см; толщина стенок 3 см. Найти объём стенок.
10. Внутренний диаметр чугунного полого шара 8 см, а внешний 10 см. Определить вес шара. Удельный вес чугуна 7,3.
11. Объём стенок полого шара равен 876π см³, а толщина стенок 3 см. Определить радиусы его поверхностей: наружной и внутренней.

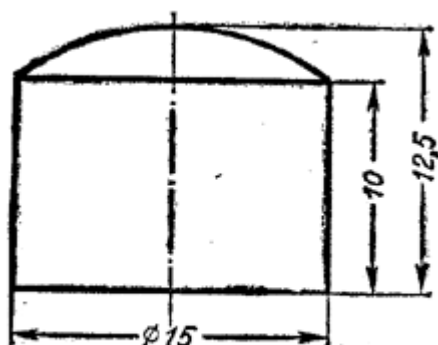
12. В основание равностороннего цилиндра радиуса R вписан квадрат, и на нём построена правильная четырёхугольная пирамида с равносторонними боковыми гранями. Требуется определить радиус шара, объём которого равен сумме объёмов цилиндра и пирамиды.
13. Сосуд имеет форму опрокинутого конуса, осевое сечение которого — равносторонний треугольник. В него брошен железный шар радиуса R . В сосуд налита вода так, что поверхность воды касается погружённого в неё шара. На какой высоте будет вода, если вынуть шар?
14. Резервуар для воды состоит из полушара радиуса R и цилиндра с таким же радиусом основания (черт. 41). Какой высоты h должна быть цилиндрическая часть его, чтобы объём всего резервуара равнялся 200 м^3 ? (Размеры даны в сантиметрах.)



Черт. 41.

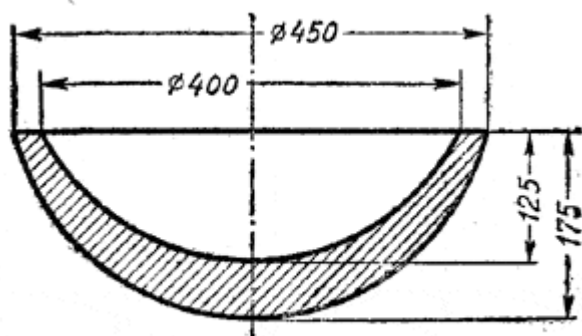
Шаровой сегмент.

15. Дан шар. Плоскость, перпендикулярная к диаметру, делит его на две части: 3 см и 9 см. На какие части делится объём шара?
16. Какую часть объёма шара составляет объём сферического сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?
17. Высота шарового сегмента составляет 0,4 радиуса шара. Какую часть составляет объём этого сегмента от объёма цилиндра, имеющего те же основания и высоту?
18. Газовый резервуар, размеры которого даны на чертеже 42 в метрах, имеет форму цилиндра, на который насажен шаровой сегмент. Определить ёмкость резервуара.



Черт. 42.

19. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объём общей части шаров к объёму целого шара?
20. Диаметр шара, равный 30 см, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Определить объём части шара, заключённой внутри цилиндра.
21. Литейный ковш имеет продольный разрез, показанный на чертеже 43. Внутренняя и внешняя поверхности — сферические (размеры даны в миллиметрах). Удельный вес 7,9. Найти вес ковша.



Черт. 43.

22. Радиусы поверхностей двояковыпуклого сферического стекла 10 см и 17 см. Расстояние между их центрами 21 см. Найти объём стекла.

Шаровой сектор.

23. Радиус шарового сектора R , угол в осевом сечении 120° . Найти объём.
24. Определить объём шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.
25. Круговой сектор с углом в 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Определить объём полученного тела.
26. Полуокруг радиуса R , разделённый двумя радиусами на три равные части, вращается вокруг диаметра. Найти объёмы тел, полученных от вращения каждой части.
27. Если в сферическом секторе площадь осевого сечения равна $\frac{1}{3}$ площади большого круга, то его объём равен $\frac{1}{4}$ объёма шара. Доказать.

Шаровой слой.

28. Радиусы оснований шарового слоя 3 м и 4 м, а радиус его шаровой поверхности 5 м. Найти объём слоя. (Два случая.)
29. В шаре, радиус которого равен 65 см, проведены по одну сторону центра две параллельные плоскости, отстоящие от центра на 16 см и 25 см. Определить объём части шара, заключённой между ними.
30. Шаровой слой и цилиндр имеют общую высоту и общие основания. Объём тела, заключённого между их боковыми поверхностями, равен 36π см³. Найти их высоту.

2 Решение задач по цилиндру

1. Радиус основания 2 м высота 3 м. Найти диагональ осевого сечения.
2. Осевое сечение – квадрат, площадь которого 10. Найти площадь основания
3. Найти площадь сечения, проведенного параллельно оси вращения на расстоянии 4 см от нее, высота 6 см, радиус основания 5 см.
4. Диагональ осевого сечения 48 см. Угол между этой диагональю и образующей равен 60° . Найти высоту цилиндра, радиус основания, площадь основания.
5. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого 4. Найти объем цилиндра.
6. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см, угол между этой диагональю и образующей равен 60° . Найти высоту цилиндра, радиус и площадь основания.
7. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с диаметром основания 1,5 м и высотой 3 м, если на один квадратный метр расходуется 200 г краски?
8. Площадь осевого сечения цилиндра 6π . Найти площадь боковой поверхности.
9. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $4\sqrt{3}$ образует с плоскостью основания угол в 45° . Найти площадь боковой поверхности.
10. Объем цилиндра равен $8\pi\sqrt{5}$, а высота $2\sqrt{5}$. Найти диагональ сечения.
11. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π , а его объем 48π . Найти его высоту.
12. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 36π , а его высота 6. Найти объем цилиндра

3 Тест по призме

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна $2\sqrt{3}$, а высота-5. Найдите объем призмы.

- 1) $15\sqrt{3}$ 2) 45 3) $10\sqrt{3}$ 4) $12\sqrt{3}$ 5) $18\sqrt{3}$

2. Выберите верное утверждение.

1) Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

2) Объем правильной треугольной призмы вычисляется по формуле $V=0,25a^2h\sqrt{3}$ -где а-сторона основания, h-высота призмы.

3) Объем прямой призмы равен половине произведения площади основания на высоту.

4) Объем правильной четырехугольной призмы вычисляется по формуле $V=a^2h$ -где а-сторона основания, h-высота призмы.

5) Объем правильной шестиугольной призмы вычисляется по формуле $V=1.5a^2h\sqrt{3}$, где а-сторона основания, h-высота призмы.

3. Сторона основания правильной треугольной призмы равна $\sqrt{3}$. Через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, которая проходит под углом 45° к основанию. Найдите объем призмы.

- 1) $9\sqrt{3}$ 2) 9 3) $4,5\sqrt{3}$ 4) $2,25\sqrt{3}$ 5) $1,125\sqrt{3}$

4. Основанием прямой призмы является ромб, сторона которого равна 13, а одна из диагоналей-24. Найдите объем призмы, если диагональ боковой грани равна 14.

- 1) $720\sqrt{3}$ 2) $360\sqrt{3}$ 3) $180\sqrt{3}$ 4) $540\sqrt{3}$ 5) $60\sqrt{3}$

5. Найдите объем правильной шестиугольной призмы со стороной основания, равной 2, и высотой, равной $\sqrt{3}$.

- 1) $18\sqrt{3}$ 2) 36 3) $9\sqrt{3}$ 4) 18 5) $6\sqrt{3}$

4 Пирамида

ЗАДАЧА пирамиде Хеопса

В основании пирамиды Хеопса – квадрат со стороной 230м, тангенс угла наклона боковой грани к основанию равен 1,2. Найти высоту самой высокой египетской пирамиды, если основание ее лежит в центре квадрата.

№1 Дана DABC- правильная пирамида $AB=3$, $AD=2\sqrt{3}$. Найти: V

№2 Дана FABCD- правильная пирамида $\angle FCO=45^\circ$, $FO=2$. Найти: V

№3 Дана FABCDEK-правильная пирамида, $FO \perp (ABC)$, $FM \perp AK$, $FO=4$, $FM=5$. Найти: V

№4 Дана DABC- пирамида, треугольник ABC- прямоугольный, AB – гипотенуза $AC=6$, $BC=8$. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° . Найти: V

№5 Дана DABC- пирамида, треугольник ABC равнобедренный $AC=AB=10$, $BC=12$. $AD=BD=CD=5$. Найти: V

№6 Дана FABCD- пирамида, ABCD- ромб, $\angle A=30^\circ$. $h_{\text{ромба}}=6$. Каждый из двугранных углов при основании равен 45° . Найти: V

№7 Дана DABC- пирамида, треугольник ABC равнобедренный $AC=AB=10$, $BC=12$. Каждый из двугранных углов при основании равен 45° Найти: V

5 Призма, параллелепипед, куб

1. Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда стороны основания, которого равны 3 и 4, если она образует с плоскостью основания угол 60° .
2. В правильной прямой четырехугольной призме площадь основания равна 144 см^2 , а высота 14 см. Определить диагональ этой призмы.
3. Объем куба 125. Найти площади поверхностей куба.
4. В прямом параллелепипеде стороны основания равные 6 и 8 образуют угол в 30° , боковое ребро 5 см. Найти площадь поверхности и объем параллелепипеда.
5. В прямой треугольной призме стороны основания 4, 5, 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Определить объем призмы, площадь поверхности.
6. Основанием призмы служит треугольник со сторонами 3, 5 и 7 см, боковое ребро равно 8 см образует с плоскостью основания угол в 60° . Найти объем призмы.
7. Кирпич имеет форму прямого параллелепипеда с измерениями $25 \times 12 \times 6,5$, плотность кирпича $1,8 \text{ г/см}^3$. Найти массу кирпича.
8. Найти объем прямой призмы, если в основании лежит прямоугольный треугольник, с катетом 35 см, гипотенузой 37 см. Высота призмы 1,1 см.
9. Найти объем наклонной призмы, если расстояние между ее боковыми ребрами равны 37, 13, 30 см., площадь боковой поверхности равна 480 см^2 .

Задачи на куб

1. Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания равны 6 и 8, а его диагональ наклонена к плоскости основания под углом 45° .
(480)
2. Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Найти объем этого параллелепипеда, если высота его 6, а его диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45° .
(108)
3. Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания 2 и 3, а длина его диагонали $\sqrt{38}$.
(30)
4. Площадь поверхности куба 180. Найти его объем.
(25)
5. Площадь поверхности куба 96. Найти ребро куба.
(4)
6. В прямоугольном параллелепипеде стороны 3 и 6 образуют с плоскостью основания угол в 30° , а боковая поверхность 24. Найти объем.
($6\frac{3}{4}$)
7. Основание прямого параллелепипеда – квадрат, со стороной $\sqrt{2}$. Найти объем этого параллелепипеда, если его диагональ образует с плоскостью основания угол 45° .
(4)
8. Диагональ куба 6. Найти площадь полной поверхности.
(72)

6 Матрицы

В ЗАДАЧАХ 1-20 решить заданную систему уравнений, пользуясь формулами Крамера. Сделать проверку полученного решения.

1. $5x + 8y - z = -7,$
 $x + 2y + 3z = 1,$
 $2x - 3y + 2z = 9.$
2. $x + 2y + z = 4,$
 $3x - 5y + 3z = 1,$
 $2x + 7y - z = 8.$
3. $3x + 2y + z = 5,$
 $2x + 3y + z = 1,$
 $2x + y + 3z = 11.$
4. $x + 2y + 4z = 31,$
 $5x + y + 2z = 29,$
 $3x - y + z = 10.$
5. $4x - 3y + 2z = 9,$
 $2x + 5y - 3z = 4,$
 $5x + 6y - 2z = 18.$
6. $2x - y - z = 4,$
 $3x + 4y - 2z = 11,$
 $3x - 2y + 4z = 11.$
7. $x + y + 2z = -1,$
 $2x - y + 2z = -4,$
 $4x + y + 4z = -2.$
8. $3x - y = 5,$
 $-2x + y + z = 0,$
 $2x - y + 4z = 15.$
9. $3x - y + z = 4,$
 $2x - 5y - 3z = -17,$
 $x + y - z = 0.$
10. $x + y + z = 2,$
 $2x - y - 6z = -1,$
 $3x - 2y = 8.$
11. $2x + y - z = 1,$
 $x + y + z = 6,$
 $3x - y + z = 4.$
12. $2x - y - 3z = 3,$
 $3x + 4y - 5z = 8,$
 $2y + 7z = 17.$
13. $x + 5y + z = -7,$
 $2x - y - z = 0,$
 $x - 2y - z = 2.$
14. $x - 2y + 3z = 6,$
 $2x + 3y - 4z = 16,$
 $3x - 2y - 5z = 12.$
15. $3x + 4y + 2z = 8,$
 $2x - y - 3z = -1,$
 $x + 5y + z = 0.$
16. $2x - y + 3z = 7,$
 $x + 3y - 2z = 0,$
 $2y - z = 2.$
17. $2x + y + 4z = 20,$
 $2x - y - 3z = 3,$
 $3x + 4y - 5z = -8.$
18. $x - y = 4,$
 $2x + 3y + z = 1,$
 $2x + y + 3z = 11.$
19. $x + 5y - z = 7,$
 $2x - y - z = 4,$
 $3x - 2y + 4z = 11.$
20. $11x + 3y - z = 2,$
 $2x + 5y - 5z = 0,$
 $x + y + z = 2.$

7 Конус

1. Высота конуса равна 8 см, а радиус основания равен 6 см. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.
2. Образующая конуса, равная 16 см, наклонена к плоскости основания под углом 30° . Вычислите площадь полной поверхности конуса.
3. Радиус основания конуса равен 9 дм, а площадь его осевого сечения равна 360 дм^2 . Вычислите площадь боковой поверхности конуса.
4. Образующая конуса, длина которой равна 9 см, наклонена к плоскости основания под углом 60° . Вычислите площадь осевого сечения конуса.
5. Площадь боковой поверхности конуса равна $72\pi \text{ см}^2$, а длина образующей равна 12 см. Вычислите площадь осевого сечения конуса.
6. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если площадь его осевого сечения равна 12 см^2 , а площадь основания равна $16\pi \text{ см}^2$.
7. Прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 6 см и 8 см, вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площадь полной поверхности конуса, образованного при этом вращении.
8. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если его высота равна 8 см, а угол при вершине его осевого сечения равен 90° .
9. Площадь боковой поверхности конуса равна $32\pi \text{ см}^2$. Вычислите угол при вершине осевого сечения, если длина образующей конуса равна 8 см.
10. Площадь боковой поверхности конуса $72\sqrt{3} \text{ см}^2$. Вычислите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, если длина образующей равна 12 см.
11. Площадь боковой поверхности конуса равна $180\pi \text{ см}^2$. Вычислите радиус окружности, вписанной в осевое сечение конуса, если длина его образующей равна 15 см.
12. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания равен 3 см, а радиус окружности, вписанной в осевое сечение, равен $3/2 \text{ см}$.
13. Площадь боковой поверхности конуса равна $60\pi \text{ см}^2$. Вычислите радиус окружности, описанной около осевого сечения конуса, если длина его образующей равна 10 см.
14. Через вершину конуса и сторону правильного треугольника, вписанного в его основание, проведено сечение. Длина каждой стороны сечения равна 10 см. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.
15. Через вершину конуса и сторону квадрата, вписанного в его основание, проведено сечение. Вычислите площадь сечения, если все его стороны равны между собой, а площадь боковой поверхности конуса равна $8\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$.
16. Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной 8 см. Через две

образующие, угол между которыми 30° , проведено сечение. Вычислите длину высоты этого сечения, проведенной из вершины конуса.

17. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен 30° . Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если расстояние от центра основания до образующей равно 6 см.

18. Площадь боковой поверхности конуса равна $32\sqrt{3}\pi$ см². Вычислите расстояние от центра основания конуса до его образующей, если образующая наклонена к плоскости основания под углом 30° .

19. Через две образующие конуса проведено сечение, основание которого — хорда, длина которой 16 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса, если радиус его основания равен 10 см, а угол наклона плоскости сечения к плоскости основания равен 60° .

20. Площадь осевого сечения конуса равна S . Угол между образующей и плоскостью основания конуса равен φ . Найдите площадь полной поверхности конуса.

21. Вычислите центральный угол развертки боковой поверхности конуса, если его высота равна 8 см, а радиус основания равен 6 см.

22. Вычислите высоту конуса, если разверткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 9 см, а градусная мера дуги равна 120° .

23. Центральный угол развертки боковой поверхности конуса равен 120° . Вычислите длину окружности основания конуса, если длина его образующей равна 30 см.

24. Радиус основания конуса 4 см. Вычислите объем конуса, если угол между его образующей и высотой равен 30° .

25. Вычислите объем конуса, если площадь его полной поверхности и площадь основания равны соответственно 24π см² и 9π см².

26. Хорда основания конуса, длина которой равна 12 см, стягивает дугу в 90° . Через эту хорду и вершину конуса проведено сечение. Вычислите объем конуса, если плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом 60° .

27. Найдите объем конуса, если угол при основании осевого сечения равен φ , а радиус окружности, описанной около этого сечения, равен R .

28. Угол между образующей и плоскостью основания конуса равен 60° . Вычислите объем конуса, если площадь его боковой поверхности равна 6π см².

29. Длина образующей конуса равна 8 см. Центральный угол развертки его боковой поверхности равен 90° . Вычислите объем конуса.

30. Площадь поверхности конуса равна 28π см². Центральный угол развертки его боковой поверхности равен 60° . Вычислите объем конуса.

31. Высота конуса равна 8 см, а его объем 96π см³. Вычислите центральный угол развертки боковой поверхности конуса.

32. Длины радиусов оснований и образующей усеченного конуса равны соответственно 7 см, 15 см и 17 см. Вычислите длину его высоты.
33. Длины радиусов оснований и образующей усеченного конуса соответственно равны 5 см, 11 см, 10 см. Вычислите площадь осевого сечения конуса.
34. Длины радиусов оснований усеченного конуса равны 9 см и 4 см. Вычислите площадь боковой поверхности этого конуса, если угол между образующей и плоскостью его основания равен 45° .
35. Длины высоты и меньшего основания прямоугольной трапеции равны 4 см. Угол между боковой стороной и основанием равен 45° . Вычислите площадь боковой поверхности усеченного конуса, полученного при вращении трапеции вокруг меньшей боковой стороны.
36. Длины высоты и образующей усеченного конуса равны соответственно 12 см и 13 см, а радиусы оснований относятся как 3 : 4. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.
37. Длина диагонали осевого сечения усеченного конуса равна 17 см, а его высота 15 см. Длина проекции образующей на плоскость основания равна 2 см. Вычислите объем усеченного конуса.
38. Объем усеченного конуса 584π см³. Радиусы его оснований равны 10 см и 7 см. Вычислите длину образующей конуса.

39. Объем усеченного конуса равен 268π см³. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если длина диагонали осевого сечения равна 15 см, а сумма радиусов оснований 9 см.

II

40. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Найдите объем конуса, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ , а расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно a .
41. В правильной треугольной пирамиде расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани равно a . Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ . Найдите объем вписанного в пирамиду конуса.
42. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если расстояние от центра основания пирамиды до боковой грани равно a , а боковые грани образуют с плоскостью основания угол φ .
43. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 5 см и 12 см. Вычислите объем конуса, вписанного в пирамиду, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° .
44. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция, длины оснований которой равны 2 см и 8 см. Вычислите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, если объем конуса, вписанного в пирамиду, равен $8\pi\sqrt{3}/3$ см³.

45. В конус вписан шар, радиус которого равен 3 см. Вычислите объем конуса, если его высота равна 8 см.
46. Высота конуса в четыре раза больше радиуса сферы, вписанной в этот конус. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если длина его образующей равна 3 см.
47. В конус вписана сфера. Найдите объем конуса, если радиус сферы равен R , а угол между высотой и образующей конуса равен φ .
48. В конус вписана сфера. Радиус окружности, по которой касаются сфера и конус, равен r . Найдите объем конуса, если угол между высотой и образующей равен φ .
49. Две взаимно перпендикулярные образующие конуса делят окружность основания в отношении 1 : 2. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если его высота равна 3 см.

8 Интегралы

В ЗАДАЧАХ 141-160 найти неопределенные интегралы способом подстановки (методом замены переменной).

- | | | |
|--|---|---|
| 141. $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx.$ | 148. $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}} dx.$ | 155. $\int \frac{x^3}{\sqrt{8x^4-1}} dx.$ |
| 142. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}.$ | 149. $\int \frac{x}{2x^4+5} dx.$ | 156. $\int \frac{x}{2x^2+3} dx.$ |
| 143. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$ | 150. $\int \frac{dx}{x \ln x}.$ | 157. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ |
| 144. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx.$ | 151. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$ | 158. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$ |
| 145. $\int e^{-x^2} x dx.$ | 152. $\int \frac{x^2}{2x^3+3} dx.$ | 159. $\int \frac{\ln x + 3}{x} dx.$ |
| 146. $\int \frac{x}{2+x^4} dx.$ | 153. $\int \sqrt{5x^4+3} x^3 dx.$ | 160. $\int \sqrt{1+2x^2} x dx.$ |
| 147. $\int \sqrt{\ln x} \cdot \frac{dx}{x}.$ | 154. $\int x^2 e^{x^3+1} dx.$ | |

В ЗАДАЧАХ 221-240 вычислить площадь, ограниченную заданными парабололами.

- | | | |
|---|--|---|
| 221. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1;$
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$ | 228. $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4;$
$y = -\frac{2}{3}x^2 + x + 2$ | 235. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1;$
$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$ |
| 222. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2;$
$y = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + 7$ | 229. $y = x^2 - 5x - 3;$
$y = -3x^2 + 2x - 1$ | 236. $y = 2x^2 + 4x - 7;$
$y = -x^2 - x + 1$ |
| 223. $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2;$
$y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$ | 230. $y = x^2 - 2x - 5;$
$y = -x^2 - x + 1$ | 237. $y = 2x^2 + 3x + 1;$
$y = -x^2 - 2x + 9$ |
| 224. $y = 2x^2 + 6x - 3;$
$y = -x^2 + x + 5$ | 231. $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5;$
$y = -\frac{3}{4}x^2 - x + 1$ | 238. $y = 2x^2 - 6x - 2;$
$y = -x^2 + x - 4$ |
| 225. $y = 3x^2 - 5x - 1;$
$y = -x^2 + 2x + 1$ | 232. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2;$
$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3$ | 239. $y = x^2 - 2x - 4;$
$y = -x^2 - x + 2$ |
| 226. $y = x^2 - 3x - 1;$
$y = -x^2 - 2x + 5$ | 233. $y = 2x^2 - 6x + 3;$
$y = -2x^2 + x + 5$ | 240. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1;$
$y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3$ |
| 227. $y = 2x^2 - 6x + 1;$
$y = -x^2 + x - 1$ | 234. $y = x^2 - 3x - 4;$
$y = -x^2 - x + 8$ | |

В задачах 241-260 найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первом квадрате и ограниченной заданными параболой и прямой.

241. $y = 2x^2$;
 $y = -2x + 4$

242. $y = x^2$;
 $y = -x + 2$

243. $y = 3x^2$;
 $y = -x + 4$

244. $y = \frac{1}{4}x^2$;
 $y = -x + 3$

245. $y = \frac{1}{2}x^2$;
 $y = -3x + 8$

246. $y = \frac{1}{3}x^2$;
 $y = -3x + 12$

247. $y = 4x^2$;
 $y = -2x + 2$

248. $y = \frac{1}{4}x^2$;
 $y = -\frac{1}{2}x + 2$

249. $y = 4x^2$;
 $y = -2x + 6$

250. $y = x^2$;
 $y = -x + 3$

251. $y = 2x^2$;
 $y = -3x + 14$

252. $y = \frac{1}{3}x^2$;
 $y = -x + 6$

253. $y = 3x^2$;
 $y = -2x + 5$

254. $y = \frac{1}{3}x^2$;
 $y = -2x + 9$

255. $y = \frac{1}{4}x^2$;
 $y = -2x + 6$

256. $y = 2x^2$;
 $y = -x + 10$

257. $y = 3x^2$;
 $y = -3x + 6$

258. $y = x^2$;
 $y = -2x + 5$

259. $y = \frac{1}{2}x^2$;
 $y = -x + 3$

260. $y = 3x^2$;
 $y = -5x + 8$

9 Задачи по пирамиде

«Сложность 1»

1. Основанием четырёхугольной пирамиды служит ромб со стороной 3 и острым углом 45° . Найти объём пирамиды, если её высота равна $\sqrt{2}$.
2. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 7, а сторона основания – 8. Определить боковое ребро.
3. Основанием треугольной пирамиды является прямоугольный треугольник с меньшим катетом $\sqrt{3}$ и острым углом 30° . Найти объём пирамиды, если её высота равна гипотенузе основания.
4. Найти объём правильного тетраэдра с ребром $3\sqrt{2}$.
5. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен 171. Найти объём другой правильной четырёхугольной пирамиды, у которой сторона основания в 3 раза меньше, а высота равна высоте данной пирамиды.
6. Чему равна площадь полной поверхности правильной пирамиды, боковое ребро которой равно 5, а основанием служит квадрат со стороной 6?
7. Основанием треугольной пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 и острым углом 45° . Найти объём пирамиды, если её высота равна 3.
8. Найти объём правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны $3\sqrt{2}$.
9. Боковые грани треугольной пирамиды – прямоугольные треугольники, а боковые рёбра равны $\sqrt{3 - \sqrt{3}}$. Вычислить полную поверхность пирамиды.
10. В правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания и равна $\sqrt[6]{3}$. Найти объём пирамиды.
11. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, двугранный угол при основании равен 45° . Определить объём пирамиды.
12. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1, а её боковая поверхность $0,5\sqrt{3}$. Найти высоту пирамиды.
13. Найти объём правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине – прямые.
14. боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в $\sqrt{3}$ раз больше площади её основания. Найти $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, где α - плоский угол при вершине пирамиды.
15. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 4 и составляет с плоскостью основания угол 60° . Найти объём пирамиды.
16. Высота правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt[4]{3}$, двугранный угол при основании равен 60° . Найти полную поверхность пирамиды.
17. Найти объём правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона её основания равна $\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 60° .
18. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырёхугольной пирамиды, равна её боковому ребру и равна $\sqrt{3}$. Найти объём пирамиды.
19. Найти объём правильной четырёхугольной пирамиды, если её боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° , а площадь диагонального сечения равна 36.
20. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $3\sqrt[6]{2}$. Найти её объём, если диагональное сечение равновелико основанию.

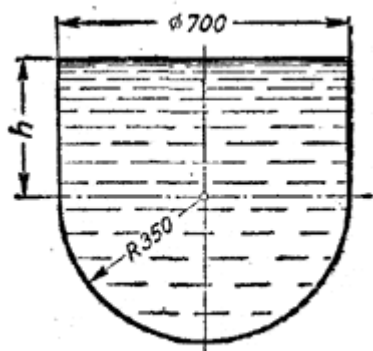
21. Стороны оснований правильной усечённой треугольной пирамиды равны 12 и 4.
Найти объём усечённой пирамиды, если её высота равна $\sqrt{3}$.
22. Стороны оснований правильной четырёхугольной пирамиды равны 3 и 1. Найти объём усечённой пирамиды, если её высота равна 3.
23. Основаниями усечённой пирамиды служат равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны 7 и 5. Найти объём усечённой пирамиды, если её высота равна 12.
24. Основаниями усечённой пирамиды служат прямоугольные треугольники с острым углом 30° . Гипотенузы треугольников равны 6 и 4. Найти объём усечённой пирамиды, если её высота равна 3.

10 Объём шара и его частей

Шар.

1. (Устно.) 1) Радиус шара 1 м. Найти объём шара.
2) Во сколько раз увеличится объём шара, если радиус его увеличить в 3 раза? в 4 раза?
2. Чугунные шары регулятора весят каждый 10 кг. Найти диаметр каждого шара. Удельный вес чугуна 7,2.
3. 1) Требуется перелить в один шар два чугунных шара с диаметрами $d_1 = 25$ см и $d_2 = 35$ см. Найти диаметр нового шара. (Угар во внимание не принимается.)
2) Радиусы трёх шаров: 3 см, 4 см и 5 см. Определить радиус шара, объём которого равен сумме их объёмов.
4. Имеется кусок свинца весом в 1 кг. Сколько шариков диаметром в 1 см можно отлить из куска? Удельный вес свинца 11,4.
5. (Устно.) 1) Свинцовый шар, диаметр которого 20 см, переливается в шарики с диаметром в 10 раз меньшим. Сколько таких шариков получится? Какое данное в задаче лишнее?
2) Нужно отлить свинцовый шар с диаметром в 3 см. Имеются свинцовые шарики с диаметром в 5 мм. Сколько таких шариков нужно взять?
6. Свинцовый шарик, диаметр которого равен 0,012 м, и полый стеклянный шар с диаметром в 0,160 м уравновешены на коромысле весов, т. е. в воздухе имеют равный вес. Если перенести всю эту систему под колокол воздушного насоса и выкачать из-под колокола весь воздух, то какой шар опустится и как велика будет разница в весе шаров? Прибор этот в физике называется бароскопом. Удельный вес воздуха 0,0013.
7. 1) Из деревянного цилиндра, в котором высота равна диаметру основания (равносторонний цилиндр), выточен наибольший шар. Определить, сколько процентов материала сточено.
2) Из куба выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?
8. Если радиусы трёх шаров относятся как 1 : 2 : 3, то объём большего шара в три раза больше суммы объёмов меньших шаров. Доказать.
9. Внешний диаметр полого шара 18 см; толщина стенок 3 см. Найти объём стенок.
10. Внутренний диаметр чугунного полого шара 8 см, а внешний 10 см. Определить вес шара. Удельный вес чугуна 7,3.
11. Объём стенок полого шара равен 876π см³, а толщина стенок 3 см. Определить радиусы его поверхностей: наружной и внутренней.

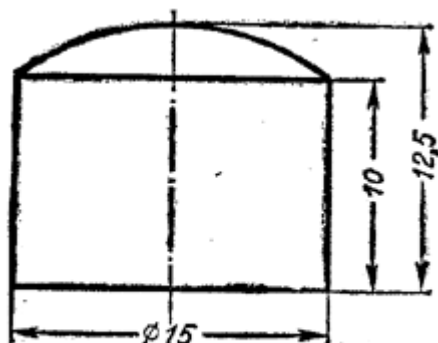
12. В основание равностороннего цилиндра радиуса R вписан квадрат, и на нём построена правильная четырёхугольная пирамида с равносторонними боковыми гранями. Требуется определить радиус шара, объём которого равен сумме объёмов цилиндра и пирамиды.
13. Сосуд имеет форму опрокинутого конуса, осевое сечение которого — равносторонний треугольник. В него брошен железный шар радиуса R . В сосуд налита вода так, что поверхность воды касается погружённого в неё шара. На какой высоте будет вода, если вынуть шар?
14. Резервуар для воды состоит из полушара радиуса R и цилиндра с таким же радиусом основания (черт. 41). Какой высоты h должна быть цилиндрическая часть его, чтобы объём всего резервуара равнялся 200 м^3 ? (Размеры даны в сантиметрах.)



Черт. 41.

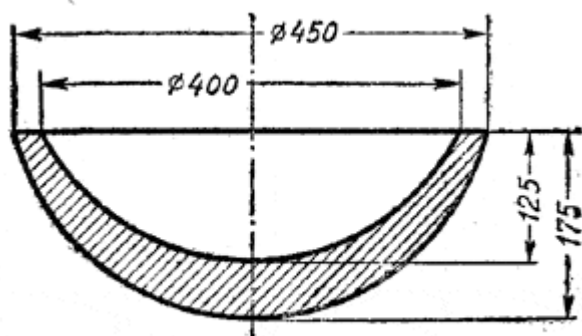
Шаровой сегмент.

15. Дан шар. Плоскость, перпендикулярная к диаметру, делит его на две части: 3 см и 9 см. На какие части делится объём шара?
16. Какую часть объёма шара составляет объём сферического сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?
17. Высота шарового сегмента составляет 0,4 радиуса шара. Какую часть составляет объём этого сегмента от объёма цилиндра, имеющего те же основания и высоту?
18. Газовый резервуар, размеры которого даны на чертеже 42 в метрах, имеет форму цилиндра, на который насажен шаровой сегмент. Определить ёмкость резервуара.



Черт. 42.

19. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объём общей части шаров к объёму целого шара?
20. Диаметр шара, равный 30 см, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Определить объём части шара, заключённой внутри цилиндра.
21. Литейный ковш имеет продольный разрез, показанный на чертеже 43. Внутренняя и внешняя поверхности — сферические (размеры даны в миллиметрах). Удельный вес 7,9. Найти вес ковша.



Черт. 43.

22. Радиусы поверхностей двояковыпуклого сферического стекла 10 см и 17 см. Расстояние между их центрами 21 см. Найти объём стекла.

Шаровой сектор.

23. Радиус шарового сектора R , угол в осевом сечении 120° . Найти объём.
24. Определить объём шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.
25. Круговой сектор с углом в 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Определить объём полученного тела.
26. Полуокруг радиуса R , разделённый двумя радиусами на три равные части, вращается вокруг диаметра. Найти объёмы тел, полученных от вращения каждой части.
27. Если в сферическом секторе площадь осевого сечения равна $\frac{1}{3}$ площади большого круга, то его объём равен $\frac{1}{4}$ объёма шара. Доказать.

Шаровой слой.

28. Радиусы оснований шарового слоя 3 м и 4 м, а радиус его шаровой поверхности 5 м. Найти объём слоя. (Два случая.)
29. В шаре, радиус которого равен 65 см, проведены по одну сторону центра две параллельные плоскости, отстоящие от центра на 16 см и 25 см. Определить объём части шара, заключённой между ними.
30. Шаровой слой и цилиндр имеют общую высоту и общие основания. Объём тела, заключённого между их боковыми поверхностями, равен 36π см³. Найти их высоту.

31. Доказать, что объём тела, полученного при вращении кругового сегмента с хордой a около диаметра, параллельного этой хорде, не зависит от величины радиуса круга.

ОТВЕТЫ

§ 21.

1. 1) $\frac{4}{3}\pi \approx 4,2$ (m^3); 2) в 27 раз; в 64 раза. 2. Около 14 см.
3. 1) Около 39 см; 2) 6 см. 4. ≈ 168 . 5. 1) 1000; 20 см; 2) 216.
6. Прибавка в весе у свинцового шара 0,0012 г, у стеклянного 2,8 г. Следовательно, опустится стеклянный шар.
7. 1) $33\frac{1}{3}\%$; 2) $\approx 47,6\%$. 9. ≈ 2148 cm^3 . 10. 1866 г $\approx 1,9$ кг.
11. 10 см и 7 см. 12. $R\sqrt[3]{\frac{3\pi+1}{2\pi}}$. 13. $R\sqrt[3]{15} \approx 2,5R$. 14. ≈ 290 см.
15. 45π cm^3 и 243π cm^3 . 16. 0,028. 17. $\frac{13}{24}$.
18. $635,5\pi \approx 2000$ (m^3). 19. 5:16. 20. 3528π cm^3 . 21. ≈ 62 кг.
22. ≈ 640 cm^3 . 23. $\frac{1}{3}\pi R^3$. 24. $112,5\pi$ dm^3 . 25. $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$.
26. $\frac{1}{3}\pi R^3$, $\frac{2}{3}\pi R^3$ и $\frac{1}{3}\pi R^3$.
28. $12\frac{2}{3}\pi \approx 40$ (m^3) или $144\frac{2}{3}\pi \approx 450$ (m^3).
29. 34182π $cm^3 \approx 107$ dm^3 . 30. 6 см.
31. В выражение объёма тела $V = \frac{1}{6}\pi a^3$ не входит радиус круга.

11 Задачи по стереометрии

1. Из центра O круга радиуса, равного 3см , восстановлен перпендикуляр OB к его плоскости.
К окружности проведена касательная в точке A и на этой касательной отложен от точки касания отрезок $AC = 2\text{см}$. Найти длину наклонной BC , если $OB = 6\text{см}$.
2. Из концов отрезка $AB = 26\text{дм}$, находящегося вне плоскости, опущены на плоскость перпендикуляры $AC = 32\text{дм}$ и $BD = 22\text{дм}$. Найти длину проекции AB на плоскость.
3. Из вершины D прямоугольника $ABCD$, стороны которого 8м и 9м , восстановлен к плоскости прямоугольника перпендикуляр $DO = 12\text{м}$. Найти расстояние от точки O до вершины B .
4. Из точки M , отстоящей от плоскости на 12мм , проведена к плоскости наклонная $MN = 37\text{мм}$. Найти проекцию MN на плоскость.
5. Из вершины C прямоугольного треугольника восстановлен перпендикуляр CK , равный 12см . Найти расстояние точки K от гипотенузы, если катеты равны 3см и 4см .
6. Найти объём и полную поверхность куба, если его диагональ равна $2\sqrt{3}\text{дм}$.
7. Вычислить полную поверхность правильной треугольной призмы, если каждое её ребро равно 10м .
8. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 16дм и 12дм . Диагональ боковой грани призмы, проходящая через больший катет, образует с основанием угол, косинус которого равен $0,8$. Найти объём, площадь боковой и полной поверхностей призмы.
9. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5мм и 12мм . Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен $\frac{5}{26}$.
Найти полную поверхность параллелепипеда и его объём.
10. Найти объём прямоугольного параллелепипеда, если диагональ его основания равна 8дм , а одна из сторон основания равна 4дм . Диагональ параллелепипеда равна 16дм .
11. В основании прямой призмы – треугольник со сторонами 26см , 25см и 17см . Её боковое ребро 10см . Вычислить полную поверхность и объём призмы.
12. Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 3дм , 4дм и 12дм .
13. В наклонном параллелепипеде боковое ребро равно 20см и образует с плоскостью основания угол 45° . Стороны основания 10см и 12см , одна из диагоналей основания равна 18см . Найти объём параллелепипеда.
14. Объём правильной прямой четырёхугольной призмы равен 512дм^3 , а площадь её основания равна 64дм^2 . Найти полную поверхность призмы.
15. Основание прямой призмы – равнобедренный прямоугольный треугольник. Диагональ грани, противоположной прямому углу, равна 12см и составляет с плоскостью основания угол 30° .
Найти объём призмы.
16. Найти объём наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной равной 4мм . Боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60° .
17. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 14м , сторона основания равна 16м .
Найти боковое ребро пирамиды.
18. Основанием пирамиды служит квадрат.
Одно из боковых рёбер перпендикулярно к плоскости основания. Наибольшее боковое ребро, равное 6дм , наклонено к основанию под углом 45° . Найти площадь основания.

19. Найти периметр основания правильной четырёхугольной пирамиды, если её высота равна 6см и апофема равна 6,5см.
20. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен 512дм^3 , а её высота равна 6дм. Найти боковую и полную поверхности пирамиды.
21. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен $\frac{3}{2}$. Диагональ основания пирамиды 8м. Найти объём пирамиды.
22. Основание пирамиды – ромб со стороной 8см и острым углом 60° . Двугранные углы при основании по 45° . Найти площадь полной поверхности и объём пирамиды.
23. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 16дм, сторона основания равна 8дм. Найти объём пирамиды.
24. Найти объём правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна 4м, а боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60° .
25. Найти объём правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, если её апофема равна 5мм, а стороны оснований равны 6мм и 8мм.
26. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 7дм, а стороны оснований равны 2дм и 10дм. Найти длину бокового ребра усечённой пирамиды.
27. Найти объём и боковую поверхность цилиндра, если образующая равна 15см, а диагональ осевого сечения наклонена к основанию под углом 45° .
28. Длина меньшей стороны развёртки равностороннего цилиндра равна 8дм. Найти боковую поверхность и объём цилиндра.
29. Два цилиндра получены вращением прямоугольника около каждой из его сторон a и b . Найти отношение объёмов этих цилиндров.
30. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 26м и составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{5}{13}$. Найти объём и боковую поверхность цилиндра.
31. Найти боковую поверхность и объём равностороннего конуса, если сторона его осевого сечения равна $8\sqrt{3}\text{мм}$.
32. Диаметр основания конуса равен 18см. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен $\frac{5}{3}$. Найти объём конуса.
33. Прямоугольный треугольник с катетами 10дм и 6дм вращается вокруг меньшего катета. Найти объём тела вращения.
34. Боковая поверхность конуса равна $6 \cdot \pi \text{ см}^2$. Образующая конуса составляет с основанием угол 60° . Найти объём конуса.
35. В конус, образующая которого равна 15 см и радиус основания равен 9см, вписан шар. Найти объём шара.

Ответы:

- | | | | |
|--|---------------------------------------|--|---------------------------|
| 1. 7см; | 2. 240см; | 3. 17м; | 4. 35мм; |
| 5. $12,24\text{см} \left(\frac{12\sqrt{26}}{5} \right)$; | 6. $8\text{дм}^2; 24\text{дм}$; | 7. $50\sqrt{6} + \sqrt{3} \text{ м}^2$; | |
| 8. $1440\text{дм}^2; 720\text{дм}^2; 9120\text{дм}^2$; | 9. $460\text{мм}^2; 600\text{мм}^2$; | 10. 3840дм^2 ; | 13. 1600см^2 ; |
| 11. $1088\text{см}^2; 2040\text{см}^2$; | 12. 130м; | 17. 18м; | |
| 14. 384дм^2 ; | 15. 162см^2 ; | 16. 24мм^2 ; | |
| 18. 9дм^2 ; | 19. $12\sqrt{3}\text{см}$; | 20. $3200\text{дм}^2; 5760\text{дм}^2$; | 21. 64м^2 ; |
| 22. $32(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ см}^2$; | $64\text{см}^2; 23. 128\text{дм}^2$; | 24. $48\sqrt{3} \text{ м}^3$; | |
| 25. $98\frac{2}{3}\sqrt{6}\text{мм}^3$; | 26. 90м; | 27. $843,75 \cdot \pi \text{ см}^3$; | 225. $\pi \text{ см}^2$; |

18. Найти объём наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной равной 4мм. Боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60^0 .
19. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 14м, сторона основания равна 16м.
20. Найти боковое ребро пирамиды.
21. Основанием пирамиды служит квадрат.
22. Одно из боковых рёбер перпендикулярно к плоскости основания. Наибольшее боковое ребро, равное 6дм, наклонено к основанию под углом 45^0 . Найти площадь основания.
23. Найти периметр основания правильной четырёхугольной пирамиды, если её высота равна 6см и апофема равна 6,5см.
24. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен 512дм^3 , а её высота равна 6дм. Найти боковую и полную поверхности пирамиды.
25. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен $\frac{3}{2}$. Диагональ основания пирамиды 8м.
Найти объём пирамиды.
26. Основание пирамиды – ромб со стороной 8см и острым углом 60^0 . Двугранные углы при основании по 45^0 . Найти площадь полной поверхности и объём пирамиды.
27. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 16дм, сторона основания равна 8дм. Найти объём пирамиды.
28. Найти объём правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна 4м, а боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60^0 .
29. Найти объём правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, если её апофема равна 5мм, а стороны оснований равны 6мм и 8мм.
30. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 7дм, а стороны оснований равны 2дм и 10дм. Найти длину бокового ребра усечённой пирамиды.
31. Найти объём и боковую поверхность цилиндра, если образующая равна 15см, а диагональ осевого сечения наклонена к основанию под углом 45^0 .
32. Длина меньшей стороны развёртки равностороннего цилиндра
33. равна 8дм. Найти боковую поверхность и объём цилиндра.
34. Два цилиндра получены вращением прямоугольника около каждой из его сторон a и b . Найти отношение объёмов этих цилиндров.
35. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 26м и составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{5}{13}$. Найти объём и боковую поверхность цилиндра.
36. Найти боковую поверхность и объём равностороннего конуса, если сторона его осевого сечения равна $8\sqrt{3}\text{мм}$.
37. Диаметр основания конуса равен 18см. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен $\frac{5}{3}$. Найти объём конуса.
38. Прямоугольный треугольник с катетами 10дм и 6дм вращается вокруг меньшего катета. Найти объём тела вращения.
39. Боковая поверхность конуса равна $6 \cdot \pi \text{ см}^2$. Образующая конуса составляет с основанием угол 60^0 . Найти объём конуса.
40. В конус, образующая которого равна 15 см и радиус основания равен 9см, вписан шар. Найти объём шара.

12 Векторы

В ЗАДАЧАХ 21-40 даны координаты вершин треугольника ABC.

Найти:

- 1) длину стороны AB;
- 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;
- 3) внутренний угол B в радианах с точностью до 0,01;
- 4) уравнение медианы AE;
- 5) уравнение и длину высоты CD;
- 6) уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB и точку M ее пересечения с высотой CD.

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. A (1; -1), B (4; 3), C (5; 1). | 11. A (2; 2), B (5; 6), C (6; 4). |
| 2. A (0; -1), B (3; 3), C (4; 1). | 12. A (4; -2), B (7; 2), C (8; 0). |
| 3. A (1; -2), B (4; 2), C (5; 0). | 13. A (0; 2), B (3; 6), C (4; 4). |
| 4. A (2; -2), B (5; 2), C (6; 0). | 14. A (4; 1), B (7; 5), C (8; 3). |
| 5. A (0; 0), B (3; 4), C (4; 2). | 15. A (3; 2), B (6; 6), C (7; 4). |
| 6. A (0; 1), B (3; 5), C (4; 3). | 16. A (-2; 1), B (1; 5), C (2; 3). |
| 7. A (3; -2), B (6; 2), C (7; 0). | 17. A (4; -3), B (7; 1), C (8; -1). |
| 8. A (3; -3), B (6; 1), C (7; -1). | 18. A (-2; 2), B (1; 6), C (2; 4). |
| 9. A (-1; 1), B (2; 5), C (3; 3). | 19. A (5; 0), B (8; 4), C (9; 2). |
| 10. A (4; 0), B (7; 4), C (8; 2). | 20. A (2; 3), B (5; 7), C (6; 5). |

13 Производные

В ЗАДАЧАХ 81-100 найти **производные** $\frac{dy}{dx}$, пользуясь правилами и формулами дифференцирования.

81. а) $y = (x - 4\sqrt[3]{x} + 2)^4$, б) $y = \frac{4x + 7\operatorname{tg}x}{\sqrt{1 + 9x^2}}$,
 в) $y = \cos 3x \cdot e^{\sin x}$, г) $y = \ln \operatorname{arctg} 2x$.
82. а) $y = (3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1)^2$, б) $y = \frac{\arcsin 3x}{1 - 8x^2}$,
 в) $y = 2^{3x} \operatorname{tg} 2x$, г) $y = \cos \ln 5x$.
83. а) $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^3} + 5\sqrt{x}\right)^4$, б) $y = \frac{\arcsin 7x}{x^4 + e^x}$,
 в) $y = e^{\operatorname{tg}x} \ln 2x$, г) $y = \cos \sqrt{x^2 + 3}$.
84. а) $y = \left(4x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 4\right)^3$, б) $y = \frac{\sin 2x}{\cos 5x}$,
 в) $y = 2^{8x} \operatorname{tg} 3x$, г) $y = \arcsin \ln 4x$.
85. а) $y = (5 - \sqrt[3]{x} + 1)^5$, б) $y = \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{2^x + \operatorname{tg}x}$,
 в) $y = \sin 4x \cdot e^{\operatorname{ctg}x}$, г) $y = \sin \ln 5x$.
86. а) $y = \left(6x^2 - \frac{2}{x^4} + 5\right)^2$, б) $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$,
 в) $y = 3^{\operatorname{tg}x} \arcsin(x^2)$, г) $y = \ln \sin 6x$.
87. а) $y = (x^3 - 4\sqrt{x^3} + 2)^3$, б) $y = \frac{\operatorname{arctg} 7x}{2 - 9x^2}$,
 в) $y = \cos 6x \cdot e^{\operatorname{ctg}x}$, г) $y = \sin \ln 2x$.
88. а) $y = (2 - 2\sqrt[5]{x} + 4)^4$, б) $y = \frac{x^3 + e^x}{\sqrt{4 - 9x^5}}$,
 в) $y = 4^{\cos x} \operatorname{arctg} 2x$, г) $y = \ln \cos 5x$.
89. а) $y = \left(3x^5 - \frac{5}{x^3} - 2\right)^5$, б) $y = \frac{\cos 6x}{\sin 3x}$,
 в) $y = e^{x^3} \operatorname{tg} 7x$, г) $y = \arcsin \ln 2x$.
90. а) $y = (4 + 2\sqrt[3]{x} + 1)^2$, б) $y = \frac{\sqrt{3 - 5x^3}}{e^x - \operatorname{ctg}x}$,
 в) $y = 2^{\sin x} \arcsin 2x$, г) $y = \ln \cos 7x$.
91. а) $y = \left(3x^5 - \frac{1}{x^4} + 7\right)^3$, б) $y = \frac{x^4 + \operatorname{tg}x}{\sqrt{4x^2 + 7}}$,
 в) $y = e^{\arcsin x} \operatorname{ctg} 3x$, г) $y = \operatorname{arctg} \ln 8x$.
92. а) $y = (x^4 - 3\sqrt[3]{x} - 1)^3$, б) $y = \frac{\sqrt{2 - x^2}}{\cos 2x}$,
 в) $y = 5^{\operatorname{arctg}x} \sin 4x$, г) $y = \ln \arcsin 3x$.
93. а) $y = (x^5 + 2\sqrt{x} - 8)^5$, б) $y = \frac{\operatorname{ctg}x - \cos x}{\sqrt{5x^2 + 1}}$,
 в) $y = e^{x^3} \arcsin 2x$, г) $y = \operatorname{arctg} \ln 5x$.

94. a) $y = \left(x^3 - \frac{3}{x^2} + 4 \right)^2$,
 B) $y = 4^{\operatorname{tg}x} \operatorname{arctg} 3x$,
95. a) $y = \left(5x^2 - 3\sqrt[5]{x^2} - 2 \right)^3$,
 B) $y = e^{\sin x} \arccos 3x$,
96. a) $y = \left(2x^4 + \frac{2}{x^3} - 7 \right)^4$,
 B) $y = 5^{6x} \arcsin 5x$,
97. a) $y = \left(x^2 - 2\sqrt[4]{x} + 5 \right)^3$,
 B) $y = e^{\arcsin x} \cos 4x$,
98. a) $y = \left(x^6 + \frac{3}{x^4} - 8 \right)^2$,
 B) $y = 4^{\operatorname{arctg}x} \cos 6x$,
99. a) $y = \left(4x^5 - 3\sqrt[5]{x^2} - 7 \right)^3$,
 B) $y = e^{\sin x} \operatorname{arctg} 3x$,
100. a) $y = \left(3x^2 - \frac{5}{x^3} + 1 \right)^4$,
 B) $y = 2^{\operatorname{arctg}x} \arcsin 2x$,
- б) $y = \frac{\sqrt{2-3x^5}}{\sin 2x}$.
 г) $y = \ln \cos 4x$.
- б) $y = \frac{2^x + \operatorname{ctg}x}{\sqrt{4+2x^3}}$,
 г) $y = \operatorname{arctg} \ln 7x$.
- б) $y = \frac{\sqrt{1-7x^5}}{\cos 4x}$.
 г) $y = \ln \sin 7x$.
- б) $y = \frac{2x^2 - \operatorname{ctg}x}{\sqrt{6x^2+5}}$,
 г) $y = \operatorname{arctg} \ln 5x$.
- б) $y = \frac{\sqrt{2-5x}}{\sin 3x}$.
 г) $y = \ln \arcsin 2x$.
- б) $y = \frac{\cos x - 4x^3}{\sqrt{3x^2+4}}$,
 г) $y = \sin \ln 7x$.
- б) $y = \frac{\sqrt{4x^5-2}}{\sin 7x}$.
 г) $y = \ln \cos 6x$.

14 Задачи на призму

Задача.2. Длины всех ребер правильной треугольной призмы равны между собой. Вычислите объем призмы, если площадь ее поверхности равна $(2\sqrt{3}+12)\text{см}^2$.

Задача 5. Основание прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ есть прямоугольный треугольник ABC (угол $ABC=90^\circ$), $AB=4\text{см}$. Вычислите объем призмы, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $2,5\text{см}$, а высота призмы равна 10см .

Глава 2, §3

Задача 29. Длина стороны основания правильной четырехугольной призмы равна 3см . Диагональ призмы образует с плоскостью боковой грани угол 30° . Вычислите объем призмы.

Глава 2, §3, страница 66-67

Задача 8. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Найдите объем призмы, если площадь сечения плоскостью, проходящей через ребро нижнего основания и середину стороны верхнего основания, равна $3\sqrt{19}\text{ см}^2$.

Глава 2, §3, страница 66-67

Задача 9. основание прямой призмы – квадрат, а ее боковые ребра в два раза больше стороны основания. Вычислите объем призмы, если радиус окружности, описанной около сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного бокового ребра, равен $2\sqrt{3}\text{ см}$.

222. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см . Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

221. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см , боковое ребро равно 6 см . Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположающую вершину нижнего основания.

237. Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 12 см , а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

225. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30° . Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

226. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2 см , а ее высота 4 см .

230. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2 . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

238. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро, отстоящее от двух других боковых ребер на 12 см и 35 см , равно 24 см . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

233. Основание прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B . Через ребро BB_1 проведено сечение $BB_1 D_1 D$, перпендикулярное к плоскости грани $AA_1 C_1 C$. Найдите площадь сечения, если $AA_1=10\text{см}$, $AD=27\text{см}$, $DC=12\text{см}$.

219. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см . Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45° . Найдите боковое ребро параллелепипеда.

220. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.