Министерство образования Тверской области
ГБОУ СПО Тверской колледж имени А.Н. Коняева

Методическая разработка
по теме «Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений»

Преподаватель:
Сергиенко Н.А.

Тверь
2012

Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений

Определение 1. Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, содержащее производные неизвестной функции или её дифференциалы.
Общий вид ДУ с одной переменной можно записать в виде
$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$

Определение 2. Порядком ДУ называется порядок наивысшей из производных (дифференциалов) входящих в это уравнение.

Примеры:
1. Уравнения $y' = y^2/x$, $y' = \sin x$, $dy = (2x + 1)dx$
являются ДУ первого порядка
2. Уравнения $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y'' = \cos x$ $y'' + 2y' = 4e^{2x}$
являются ДУ второго порядка.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется решение ДУ, если уравнение обращается в тождество после подстановки $y = f(x)$.

Основной задачей теории ДУ является разыскивание всех решений данного ДУ. В простейших случаях эта задача сводится к вычислению интеграла. Поэтому решением ДУ называют также его интегралом, а процесс разыскивания всех решений – интегрированием ДУ.

Приме
р 1. Функция $y = \sin x$ есть решение ДУ второго порядка $y'' + y = 0$, так как
$y' = (\sin x)' = \cos x$, $y'' = (\cos x)' = -\sin x$ и после подстановки в уравнение
$-\sin x + \sin x = 0$ становится тождеством.

Функция $y = ½ \sin x$, $y = \cos x$, $y = 3 \cos x$ - тоже решение уравнения $y'' + y = 0$,
а функция $y' = \sin x + 1/2$ не является решением, так как $y' = (\sin x + ½)' = \cos x$
$y'' = (\cos x)' = -\sin x$ и после подстановки в уравнение получаем:
$-\sin x + \sin x + ½ \neq 0$, т.е. не является тождеством.

Пример 2. Найти все решения ДУ $y' = \cos x$
Решение: Неизвестная функция $y = f(x)$ есть первообразная для функции $\cos x$
Общий вид такой функции есть неопределенный интеграл $\int \cos x\, dx$.
Стало быть, все решения содержаться в формуле $y = \int \cos x\, dx = \sin x + C$.
Рассмотренный пример показывает, что множество решений ДУ задается формулой
$y = f(x, c)$, где C – произвольная постоянная.

Определение 4. Функция $y = f(x, c)$, которая при каждом фиксированном значении C как функция от x является решением ДУ, называется общим решением уравнения.

Для определения значения постоянной интегрирования «С» необходимо знать начальные условия $y(x_0) = y_0$, где x_0 и y_0 – заданные числа. Подставив в общее решение ДУ вместо $x - x_0$, а $y - y_0$, получим уравнение относительно постоянной «С».
Решив его, получим конкретное значение постоянной «С». Подставив значение «С» в общее решение, получим частное решение ДУ. Задача нахождения ДУ, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, называют задачей Коши.

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется решением ДУ?
3. Как проверить, правильно ли найдено решение ДУ?
4. Что называется общим решением ДУ?
5. Что называется частным решением ДУ?
6. Как определяется порядок ДУ?

Уравнения с разделяющими переменными

Определение. ДУ вида $Q(y)dy = P(x)dx$ (коэффициент P зависит только от x, коэффициент Q – только от y) называется уравнением с разделяющимися переменными первого порядка.

Для нахождения решения следует:

1) разделить переменные, т.е преобразовать данное уравнение к виду $Q(y)dy = P(x)dx$;
2) проинтегрировать обе части полученного уравнения по y и x соответственно $\int Q(y)dy = \int P(x)dx$, т.е. найти некоторую первообразную g(y) функции Q(y) и некоторую первообразную p(x) функции P(x)
3) написать уравнение $g(y) = p(x) + C$, где C – произвольная постоянная, которая является общим решением ДУ.
4) Если известны начальные условия, решив задачу Коши, получим частное решение ДУ.

ПРИМЕРЫ (на доске)

Примеры решения ДУ

Пример 1. $2\,ydy = 3\,x^2\,dx$

Решение. В этом уравнении переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения

$\int 2ydy = \int 3\,x^2\,dx$, $\quad 2\,y^2/2 = 3\,y^3/3 + C \qquad y^2 = x^3 + C.$

Получим общее решение ДУ. Это решение можно записать в явной форме $y = \sqrt{x^3 + C}$, но обычно решения, полученные в неявной функции, или оставляют в той форме, как оно получилось, либо переписывают в виде $y^2 + x^3 = C$.

Пример 2. Найти общее решение ДУ $dy/y = dx/x-1$

Решение Интегрируем обе части уравнения

$\int dy/y = \int dx/x-1$

Интеграл $\int dx/x-1$ вычисляется подстановкой

$\int dx/x-1 = \int dt/t = \ln/t/ + C = \ln/x-1/ + C$

Подстановка:

$x – 1 = t \qquad dx = dt$

Имеем: $\ln/y/ = \ln/x-1/ + C$,

Так как C – произвольная постоянная величина, то для удобства записи вместо C написать lnC, а затем потенцировать: $\ln/y/ = \ln/x – 1/ + \ln C$, $\qquad y = C(x – 1)$.

Пример 3. Найти общее решение ДУ $\qquad 3dx – y^2\,dy + xdx = 0$

Решение. Чтобы произвести разделение переменных, надо сгруппировать члены с dx и записать полученные функции в разных частях равенства

$y^2\,dy = (3 + x)\,dx$

Получили уравнение с разделенными переменными.
Интегрируем:
$\int y^2\, dy = \int(3 + x)\, dx$, $y^3 /3 = 3x + x^2 /2 + C$

Пример 4. Найти общее решение ДУ $1 + y – xy^{/} = 0$
Решение. Заменим y/ на dy/dx
$1 + y – x\, dy/dx = 0$
Умножим все члены на dx: $dx + ydy – xde = 0$
Сгруппируем члены с dx:
$(1 + y)dx – xdy = 0$
Запишем полученные функции в разных частях равенств:
$x\, dy = (1 + y)\, dx$
Чтобы разделить переменные, надо обе части равенства разделить на произведение x (1 + y). Получим уравнение
$dy/1 + y = dx/x$.
Интегрируем: $\int dy/1 + y = \int dx/x$, $\ln/1 + y/ = \ln/x/ + \ln C$
$\ln /1 + y/ = \ln /xC/$, $1 + y = x C$, $y = xC – 1$
Делаем проверку:
$1 + C x – 1 – x (Cx – 1)^{/} = 0$, $Cx – Cx = 0$
Получим тождество, следовательно, функция $y = C x – 1$ является решением ДУ.

Пример 5. Найти частное решение ДУ $dy = (x^2 – 1)\, dx$, если при $x = 1$, $y = 4$.
Решение. Находим общее решение:
$\int dy = \int (x^2 – 1)dx$, $y = x^3 /3 – x + C$
В полученное уравнение вместо x подставим 1, y – 4 , имеем:
$4 = 1/3 - 1 + C$, $C = 4\ 2/3$
Подставив в общее решение вместо C 4 2/3 , получаем частное решение
$y = x^3 /3 - x + 4\ 2/3$.