Министерство образования Тверской области

ГБПОУ «Тверской колледж им. А.Н. Коняева»

Учебное пособие для студентов по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия». Тема «Теория пределов»

г. Тверь

2015

ОДОБРЕНА	УТВЕРЖДАЮ
предметной /цикловой/	заместитель директора
комиссией	по учебной и научно-
«___»_______________20___г.	методической работе
Протокол №_________	______________ Н.С.Лукина
Председатель предметной	«____» ____________20____г.
/цикловой/комиссии	

Разработал (а) преподаватель
Лабудина Ирина Алексеевна

Цель пособия: Недостаток учебной литературы по дисциплине «Элементы высшей математики» вызывает трудности у студентов в усвоении предмета. Особенно много проблем возникает у студентов, которые пропускают занятия. Учебники по данному предмету или очень трудны для студентов, или не освещают полностью программный материал. Данное пособие написано по действующей программе курса, приведены примеры решения задач, освещен необходимый теоретический материал. Учебное пособие по теме «Теория пределов» поможет в усвоении данной темы, а так же преподавателю в подготовке к занятиям.

1. <u>Величины постоянные и переменные</u>

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами постоянными и величинами переменными.

<u>Определение.</u> Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и тоже значение (или вообще, или в данном процессе).

Переменной величиной называется величина, принимающая различные числовые значения.

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин (независимые переменные) полностью определяют значения других (зависимые переменные или функции).

<u>Определение</u>. Переменная величина *y* называется функцией от переменной величины *x*, если они связаны так, что каждому рассматриваемому значению величины *x* соответствует единственное вполне определенное значение величины *y*. ($y=f(x)$). Переменная *x* называется при этом аргументом или независимой переменной, *y* называют зависимой переменной или функцией. Относительно самих величин *x* и *y* говоря, что они находятся в функциональной зависимости.

2. Понятия бесконечно малой и бесконечно больших величин.

Бесконечно малая величина.

Возьмем переменную величину α, применяющую значения: 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$;$\frac{1}{4}$;$\frac{1}{5}$;… . По мере увеличения номера места, занимаемого членами этой последовательности, величина α уменьшается и приближается к нулю. Такая величина называется бесконечно малой и записывается так: $\alpha \to 0$

Бесконечно большая величина.

Пусть переменная β принимает последовательно значения: 2;4;6;8;10;12;… . Как видно, с увеличением номера места, величина β неограниченно возрастает. Такая величина называется бесконечно большой и записывается $\beta \to \infty$

Связь бесконечно малой величины с бесконечно большой.

Между бесконечно малой и бесконечно большой величинами существует связь, а именно: если β – бесконечно большая величина, то обратная ей величина $\frac{1}{\beta}$ - бесконечно малая ($\frac{1}{\beta}$=α), и если α – бесконечно малая величина, то обратная ей величина $\frac{1}{\propto}$ - бесконечно большая ($\frac{1}{\propto} = \beta$).

3. <u>Понятие о пределе переменной.</u>

Пусть дана функция *y=2x+1*, рассмотрим как ведет эта функция, если *x* приближается к числу *2 (x→2)*, при этом рассмотрим случаи: 1) *x* приближается к *2*, оставаясь меньше *2* (*x* стремится к *2* слева, *x→2*-).

x	$x_1 = 1,8$	y	$y_1 = 4,6$
	$x_2 = 1,9$		$y_2 = 4,8$
	$x_3 = 1,95$		$y_3 = 4,9$
	$x_4 = 1,97$		$y_4 = 4,96$
2-	$x_5 = 1,99$	5	$y_5 = 4,98$

Мы видим, что если *x→2*-, значения функции меняются и приближаются к числу *5*, это записывается так:

$$\lim_{x \to 2-} (2x + 1) = 5$$

(предел функции в точке *x=2* слева, равен 5).

2) *x* приближается к *2*, оставаясь больше *2* (*x* стремится к 2 справа, *x→2+*).

x	$x_1 = 2,2$	y	$y_1 = 5,4$
	$x_2 = 2,1$		$y_2 = 5,2$
	$x_3 = 2,05$		$y_3 = 5,1$
	$x_4 = 2,02$		$y_4 = 5,04$
2+	$x_5 = 2,01$	5	$y_5 = 5,02$

Мы видим, что если *x→2+,* значения функции приближаются к числу *5*:

$$\lim_{x \to 2+} (2x + 1) = 5$$

Обобщив оба случая, мы видим, что как бы x не приближался к числу *2* (слева или справа), значение функции стремится к числу *5*. Это число называется пределом функции *y=2x+1* в точке *x=2* и записывается $\lim_{x \to 2} (2x + 1) = 5$.

<u>Определение.</u> Пусть дана функция *y*=*f*(*x*). Число *B* называется пределом функции в точке x_0, если для всех x близких к x_0, значения функции мало отличаются от числа *B* и записывается:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = B$$

Из приведенного примера видно, что число В равно значению функции в точке x_0 (B=f(x_0)), это позволяет в простейших случаях вычислить пределы, как значение функции в данной точке.

<u>Пример 1.</u>

$$\lim_{x\to 3}(2x^2 - 3x + 7) = 2 * 3^2 - 3 * 3 + 7 = 16$$

(Это значит, что для всех *x* близких к *3*, значения функции мало отличается от числа *16*).

<u>Пример 2.</u>

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+1}{2x-1} = \frac{3*(-2)^2+1}{2*(-2)-1} = \frac{13}{-5} = -2\frac{3}{5}$$

<u>Пример 3.</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(4sinx - 2cosx) = 4 * sin\frac{\pi}{2} - \ 2\cos\frac{\pi}{2} = 4 * 1 - 2 * 0 = 4$$

<u>Пример 4.</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x+3} = \frac{1^2-1}{2*1+3} = \frac{0}{5} = 0$$

(Если предел функции равен *0*, то такая величина называется бесконечно малой, т.е. близкой к нулю (но не *0*)).

<u>Пример 5.</u>

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x-2}{x^2-16} = \frac{3*4-2}{4^2-16} = \frac{10}{0} = \infty$$

(Заметим, что в знаменателе не 0, а бесконечно малая величина, и мы имеем случай не деления на 0).

4. <u>Теоремы о пределах.</u>

<u>Теорема 1</u>. Если функция в данной точке имеет предел, то этот предел единственный.

<u>Теорема 2.</u> Предел постоянной величины равен самой величине:

$$\lim_{x \to x_0} c = c$$

<u>Теорема 3.</u> Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) этих функций:

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x)$$

<u>Теорема 4</u>. Предел произведения функций равен произведению их пределов.

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) * f_2(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) * \lim_{x \to x_0} f_2(x)$$

<u>Теорема 5</u>. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x \to x_0} c * f_1(x) = c * \lim_{x \to x_0} f_1(x)$$

<u>Теорема 6.</u> Предел отношений двух функций равен отношению их пределов.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim_{x \to x_0} f_2(x)}$$

<u>Примечание:</u> Доказательства данных теорем приводятся в учебниках.

5. Раскрытие неопределенностей.

При вычислении более сложных пределов, нам необходимо преобразовать алгебраические дроби. Для разложения на множители алгебраических выражений, будем использовать формулы, изучаемые в школьном курсе:

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
3) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
4) $a * x^2 + b * x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 $и$ x_2 - корни квадратного трехчлена.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x^2+x}$$

Решение. Предел числителя $\lim_{x\to 0}(x^2+2x)=0$ и предел знаменателя $\lim_{x\to 0}(x^2+x)=0$. В этом случае получается выражение $\frac{0}{0}$. (Неопределенность типа 0 делить на 0). Однако, отсюда следует, что данная функция не имеет предела; для его нахождения нужно предварительно преобразовать функцию.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}=\frac{0+2}{0+1}=2$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2-3x-2}=\frac{4-4}{2*2^2-3*2-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

В этом случае числитель и знаменатель разложим на множители, используя в числителе разложение разности квадратов $x^2-4=(x-2)(x+2)$, а в знаменателе разложение квадратного трехчлена, для того найдем его корни: $2x^2-3x-2=0,$ => $x_{1,2}=\frac{3\pm5}{4}$, => $x_1=2,\ x_2=-\frac{1}{2}$.

$$=\lim\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2x+1}=\frac{4}{5}$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-3x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

Числитель разложим на множители как сумму кубов $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, а знаменатель как квадратный трехчлен $x^2-3x-4=0,=>\ x_1=-1;\ x_2=4.$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-4)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{x-4}=\frac{3}{-5}=-\frac{3}{5}$$

Пример 4

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{2x^2-3x-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$x^2-x-6=0\ =>\ x_1=3;\ x_2=-2.$$

$$2x^2-3x-9=0\ =>\ x_1=3;\ x_2=-1\frac{1}{2}.$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}=\frac{3\pm 9}{4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{2(x-3)(x+1\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{2x+3}=\frac{5}{9}.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to 3}\qquad=-\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{3+x}=-\frac{27}{6}=-4\frac{1}{2}.$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

Как и в предыдущих примерах, данная функция должна подвергнуться преобразованию. Для этой цели освободим числитель от иррациональности, умножив оба числа дроби на $\sqrt{x+3+2}$, и сделав необходимые упрощения.

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3+2})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{1}{2*4} = \frac{1}{8}.$$

<u>Пример 7.</u>

$$\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(x+\frac{11}{6}\right)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}{\left(\sqrt{3x+3}-3\right)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(x+\frac{11}{6}\right)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}{3x+3-9}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(x+\frac{11}{6}\right)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}{3(x-2)} = \left(2+\frac{11}{6}\right)*6 = 12+11$$

$$= 23.$$

<u>Пример 8.</u>

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x+7-9)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}.$$

6. Предел функции при $x \to \infty$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x+2}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0$$

Знаменатель $3x+2$ при $x\to\infty$ неограниченно растет, т.е. представляет бесконечно большую величину; обратная же ей величина $\frac{1}{3x+2}$ - бесконечно малая, т.е. стремится к 0.

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{7}=\left[\frac{\infty}{7}\right]=\infty$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

Числитель и знаменатель данной дроби – бесконечно большие величины, получили неопределенность типа ∞ делится на ∞. Преобразуем дробь путем по членного деления числителя и знаменателя на x в наибольшей степени, в нашем случае на x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{4+0}=\frac{3}{4}.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+2}{3x^2+x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{4-0+0}{3+0+0}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-1}{3x^3+2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{0+0+0}{3+0+0}=0.$$

7. **Замечательные пределы.**

а) Рассмотрим $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$

Получаем неопределенность типа 0 делить на 0, алгебраические преобразования не позволяют выйти из неопределенности (как это было в пункте 5). Существуют геометрические доказательства этого предела (их можно найти в учебниках):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad =>$$

$sin\, x \sim x$ (синус углов в радианах близких к 0 равен величине этого угла).

Определение. Эквивалентными называются бесконечно малые величины, предел отношения которых равен единице. Можно указать и на другие бесконечно малые величины:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,$ => $x\sim\ \sin x$

б) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}*\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1, \quad =>$ $\operatorname{tg}x\sim x$

в) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1, \quad => x\sim \operatorname{tg} x$

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x^2}=4.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0} \sin 4x * \operatorname{ctg} 2x = [0 * \infty] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x} = 2$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos^2 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{sin^2 2x}{x^2} = 4$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\sin x + \operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 4 + 1 = 5.$$

б) Рассмотрим предел числовой последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$ при $n \to \infty$.

В подробных курсах анализа доказывается, что $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ существует, что он больше 2 и меньше 3, и выражается иррациональным числом. Составим таблицу значений выражения $(1 + \frac{1}{n})^n$ при возрастающих значениях n.

n	1	2	3	4	5	…	10	…	100	…	1000
$(1 + \frac{1}{n})^n$	2	2,25	2,37	2,44	2,49		2,59		2,705		2,717

Предел $(1 + \frac{1}{n})^n$ при $n \to \infty$, равный приближению 2,718, принято обозначать буквой e.

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e \approx 2{,}7 \approx 2{,}72 \approx 2{,}718.$$

Или

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^n = e.}$$

Следствие:

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x})^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{5}{t}} = \lim_{t\to 0}((1+t)^{\frac{1}{t}})^5 = e^5$$

Положим $\frac{5}{x} = t$ $=>$ если $x \to \infty$ => $t \to 0$

$x = \frac{5}{t}$.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{3}{2t}} = \lim_{t\to 0}((1+t)^{\frac{1}{t}})^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

Положим $-3x = t$ $=>$ если $x \to 0$ => t→0,

$x = \frac{t}{-3}$.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{2}x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{2t}} = e.$$

Положим $\frac{1}{2}x = t$ $=>$ если $x \to 0$ => t→0,

$x = 2t$.

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{6}{t}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

Положим $-\frac{2}{x} = t$ $=>$ если $x \to \infty$ => $t \to 0$

$x = -\frac{2}{t}$.

8. Односторонние пределы.

Если значение функции $f(x)$ стремится к числу b, по мере стремления x к x_o со стороны меньших значений, то число b, называется левосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_o и пишут

$$\lim_{X \to X_0 -} f(x) = b_1$$

Если $f(x)$ стремится к b_2 по мере стремления x к x_o со стороны больших значений, то b_2 называется правосторонним пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ и пишут

$$\lim_{X \to X_0 +} f(x) = b_2$$

Величина $|b_2 - b_1|$ называется скачком или разрывом.

Пример 1. $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$

В точке функция не определена (деление на 0 невозможно). Рассмотрим, как ведет себя функция в окрестности этой точки, т.е. найдем односторонние пределы.

$$\lim_{X \to 1-} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{-0} = -\infty$$

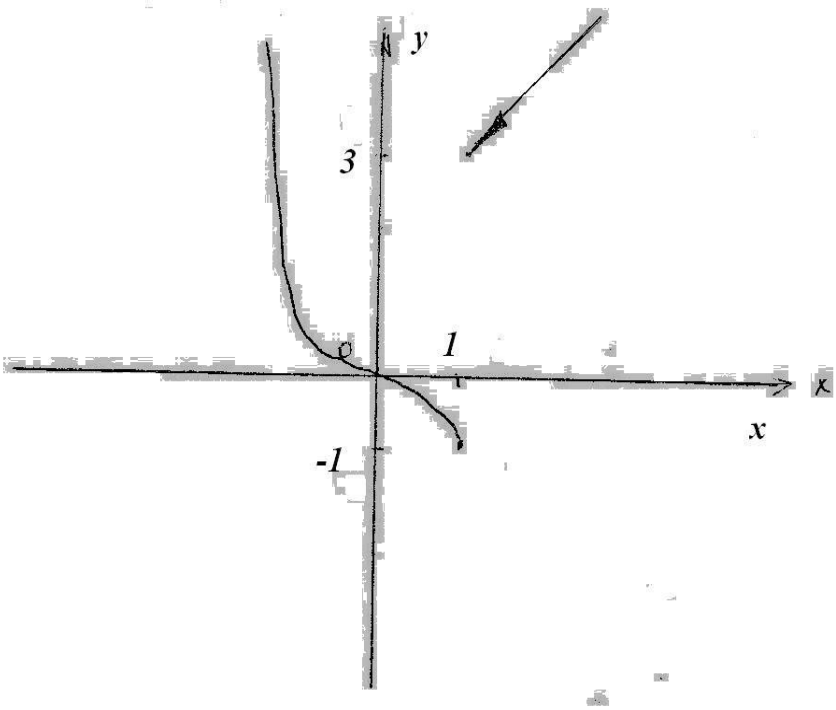
Знаменатель дроби при приближении x к 1 слева становится бесконечно малой отрицательной величиной.

$$\lim_{X \to 1+} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{+0} = \infty$$

Знаменатель дроби при приближении x к 1 справа становится бесконечно малой положительной величиной.

Пример 2. $f(x) = \begin{cases} -x^3, если\ x \le 1, \\ x+2, если\ x \rangle 1. \end{cases}$

Построим график этой функции, он состоит из двух частей:



Данная функция определена на всей числовой оси. Вычислим, используя график, односторонние пределы в точке $x_0 = 1$

$$\lim_{X \to 1-} f(x) = -1, \qquad \lim_{X \to 1+} f(x) = 3$$

Следовательно, данная функция не имеет предела в точке $x = 1$, т.к. $\lim\limits_{X \to 1-} f(x) \neq \lim\limits_{X \to 1+} f(x)$.

Скачок равен *3-(-1)=4.*

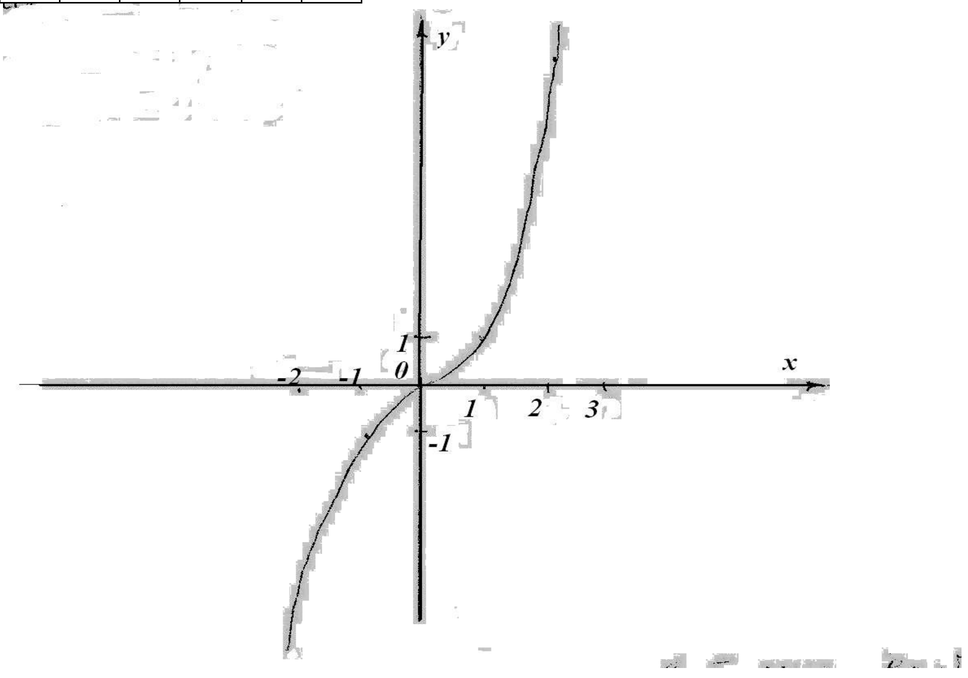
9. <u>Непрерывность функции.</u>

Впервые с непрерывными функциями вы встречались и широко использовали их свойства при построении графиков функций. На первых этапах построение графиков простейших функций, например, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = ax^3$, совершается по точкам. А именно, составляют таблицу значений функции, соответствующим определенным значениям аргумента, затем на плоскости, в которой задана система координат, строят точки, координаты которых записаны в таблицу; соединив отмеченные точки «сплошной линией», получают график. Это можно делать не всегда, а только в том случае, если функция непрерывна. Рассмотрим конкретные примеры. Построим графики функций.

Пример 1. $y = x^3$

Функция определена на всей числовой прямой.

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

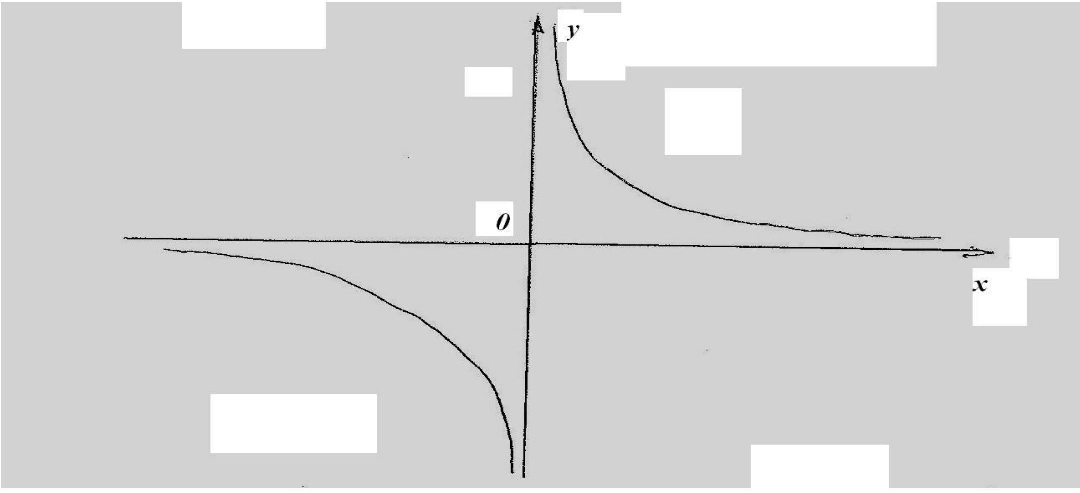


Эта функция непрерывна на всей числовой прямой, т.к. её график можно построить, не отрывая руки от листа.

Пример 2.

$y = \frac{4}{x}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	-	4	2	$\frac{4}{3}$	4

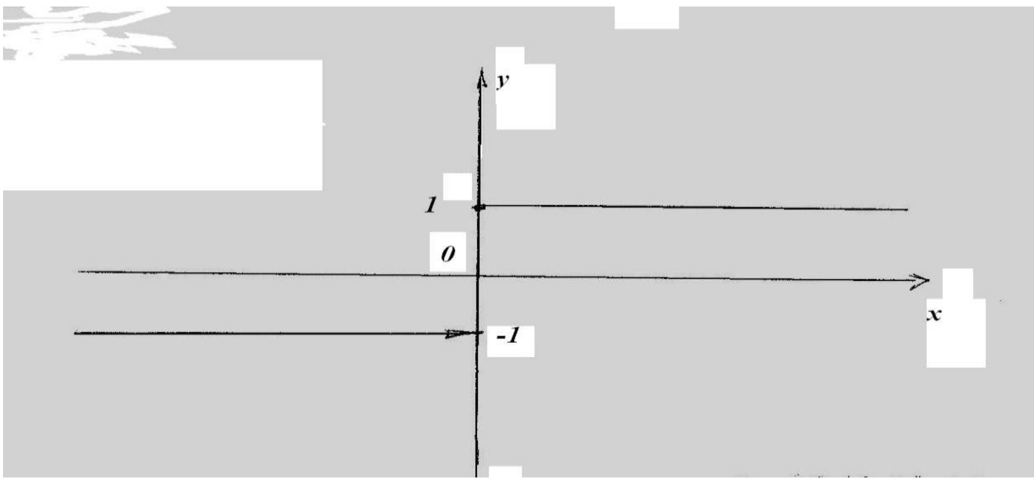


Рассмотрим точку $x=0$, в этой точке функция неопределенна (на 0 делить нельзя).

График функции состоит из двух частей, и построить его не отрывая руки невозможно.

Пример 3.

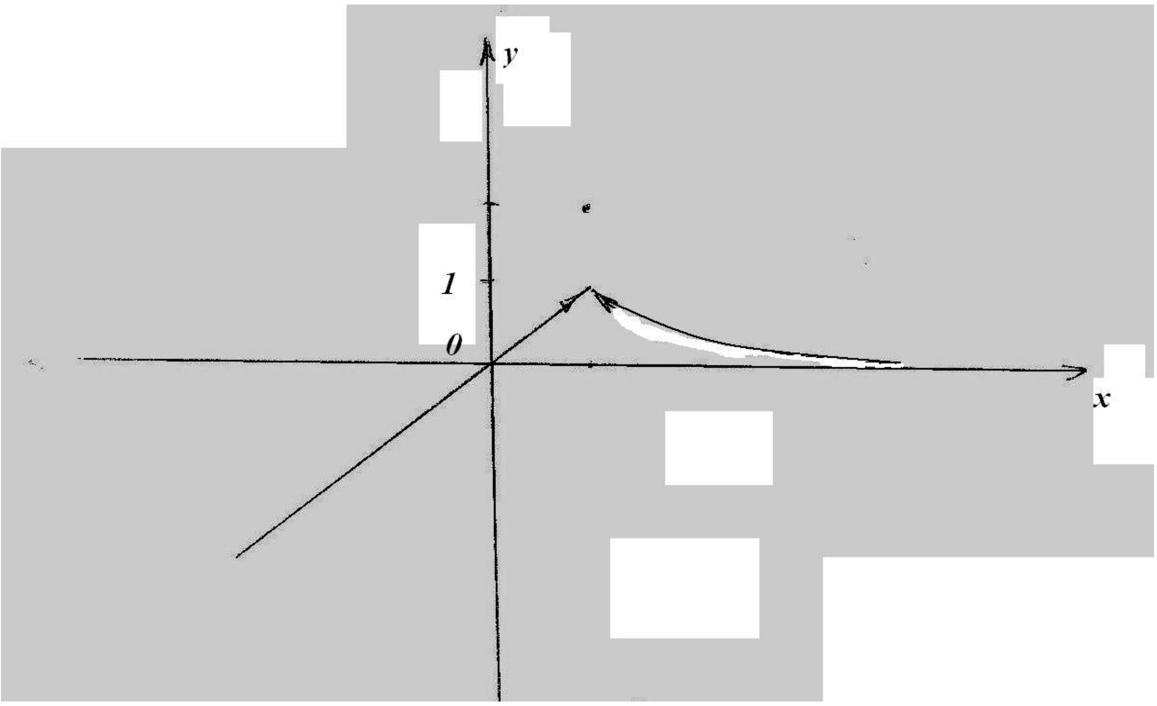
$$y = \begin{cases} 1, если \quad x \geq 0, \\ -1, если \quad x \langle 0. \end{cases}$$



$x=0$. В этой точке функция определена ($y(0)=1$). Но предел функции слева $\lim\limits_{X\to 0-} y=-1$, а справа $\lim\limits_{X\to 0+} y=1$,т.е. односторонние пределы разные и предел функции в этой точке не существует.

Пример 4.

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, если \quad x\rangle 1,\\ x, если \quad x\langle 1,\\ 2, если \ x=1.\end{cases}$$



Функция определена на всей числовой прямой, в том числе и в точке $x=1$ ($y(1)=2$).

$\lim\limits_{X\to 1-} y$ = $\lim\limits_{X\to 1-} y$ (односторонние пределы равны). Но в точке $x=1$ значение функции 2 отличается от предела функции в этой точке (он равен 1). График этой функции не отрывая от руки строить нельзя.

На основании этих примеров сформируем определение непрерывности функции в точке x_0.

Определение.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции в точке существует и равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Согласно данному определению непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 означает выполнимость следующих условий:

1) функция $y = f(x)$ должна быть определена в точке x_0;
2) односторонние пределы функции в точке x_0 должны быть равны, т.е. предел существует;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Если условия непрерывности выполняются во всех точках некоторого интеграла, то функция непрерывна на этом интеграле.

Функция $y = f(x)$ называется разрывной в точке x_0, если не выполняется хотя бы одно условие непрерывности.

Пример 1. Точка $x_0 = 0$ - точка разрыва (функция в этой точке не существует).

Пример 2. Функция определена на всей числовой прямой, но в точке односторонние пределы разные. Точка $x_0 = 0$ – точка разрыва.

Пример 3. Функция определена на всей числовой прямой. В точке $x_0 = 1$ предел существует $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$, но значение этого предела отлично от значения функции в этой точке ($f(1) = 2$). $x_0 = 1$ –точка разрыва.

Точки разрыва бывают двух видов:

Первого рода и второго рода.

Точка разрыва функции называется точкой разрыва первого рода, если функция в этой точке имеет конечные пределы справа и слева. Во всех остальных случаях точки разрыва называются точками разрыва второго рода.

Рассмотрим примеры.

Исследовать на непрерывность функции в данных точках.

Пример 1. $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$, $x_1=2$, $x_2=3$.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_1=2$.

1) $f(2)=\dfrac{2*2}{2-3}=-4$ (функция в этой точке определена - первое условие выполняется);

2) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{2*2}{2-3}=-4$, $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{2x}{x-3}=-4$.

(пределы слева и справа равны, т.е. в этой точке функция имеет предел- второе условие выполняется);

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{x-3}=-4=f(2)$ (третье условие выполняется).

Вывод: функция $y=\dfrac{2x}{x-3}$ в точке $x_1=2$ непрерывна.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_2=3$.

1) $f(3)=\dfrac{2*3}{3-3}=\dfrac{6}{0}$ (функция в этой точке неопределенна - первое условие не выполняется);

2) $\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{-0}=-\infty$

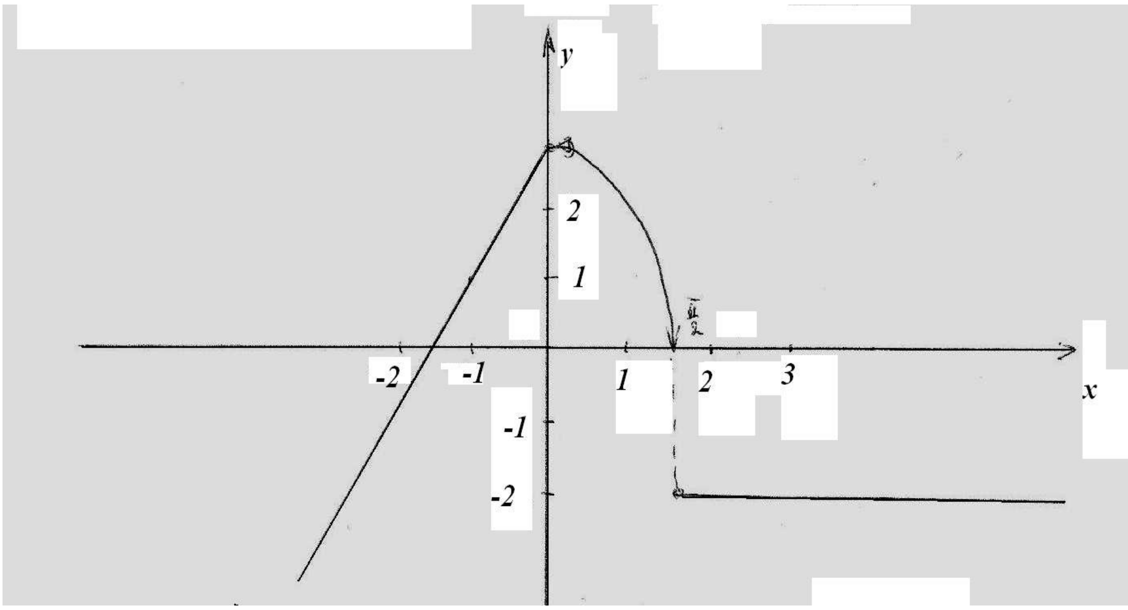
$\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{+0}=\infty$

(второе условие не выполняется).

Вывод: функция $y=\dfrac{2x}{x-3}$ в точке $x_2=3$ имеет бесконечный разрыв.

Пример 2. $f(x)=\begin{cases}2x+3, если & x\le 0, & x_1=0,\\ 3\cos x, если & 0<x<\dfrac{\pi}{2} & x_2=\dfrac{\pi}{2}\\ -2, если & x\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Построим график этой функции:



Исследуем на непрерывность в точке $x_1=0$.

1) $f(0)=3$ (функция определенна);

2) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=3$ (второе условие выполняется);

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3=f(0)$ (третье условие выполняется).

Вывод: функция в точке $x_1=0$ непрерывна.

Исследуем на непрерывность в точке $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

1) $f(\dfrac{\pi}{2})=-2$ (функция определенна);

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} f(x)=-2$ (односторонние пределы разные, т.е. в этой точке функция предела не имеет - второе условие не выполняется).

Вывод: функция в точке $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ терпит разрыв первого рода, её скачок равен $|0-(-2)|=2$.

10.Построение графиков функций.

Используя непрерывность функции, зная как ведет себя функция в окрестностях точек разрыва, а так же асимптоты, можно строить графики функций.

Асимптотой называется такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении её от начала координат.

Различают вертикальные и невертикальные асимптоты:

1) Вертикальные асимптоты.

Если при $x = x_0$ кривая $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв, то прямая $x = x_0$ является её вертикальной асимптотой;

2) Невертикальные асимптоты кривой $y = f(x)$, если они существуют, имеют уравнение вида $y = f(x)$, где параметры k и b определяются формулами

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

Для построения графика функции будет использовать следующую схему:

1) Найти область определения функции;

2) Найти уравнения асимптот:

а) вертикальных: $x = x_1$, $x = x_2$ и т.д., где x_1, x_2 ,…- точки разрыва, односторонние пределы в этих точках;

б) невертикальных: $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Пределы функции на бесконечности.

3) Точки пересечения графика с осями координат:

а) с осью oy: $y(0)$.

б) с осью ox: $f(x) = 0$.

4) Построить график, используя все полученные результаты.

Пример. Построить график функции $y = \frac{3x}{x-2}$.

1) Область определения функции - вся числовая прямая кроме $x-2=0 \Rightarrow x=2$.

2) Асимптоты:

а) вертикальные: $x=2$

Односторонние пределы функции в точке $x=2$:

$$\lim_{x\to 2-}\frac{3x}{x-2}=\frac{6}{-0}=-\infty, \quad \lim_{x\to 2+}\frac{3x}{x-2}=\frac{6}{+0}=+\infty$$

б) невертикальные: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x(x-2)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-2}=3.$$

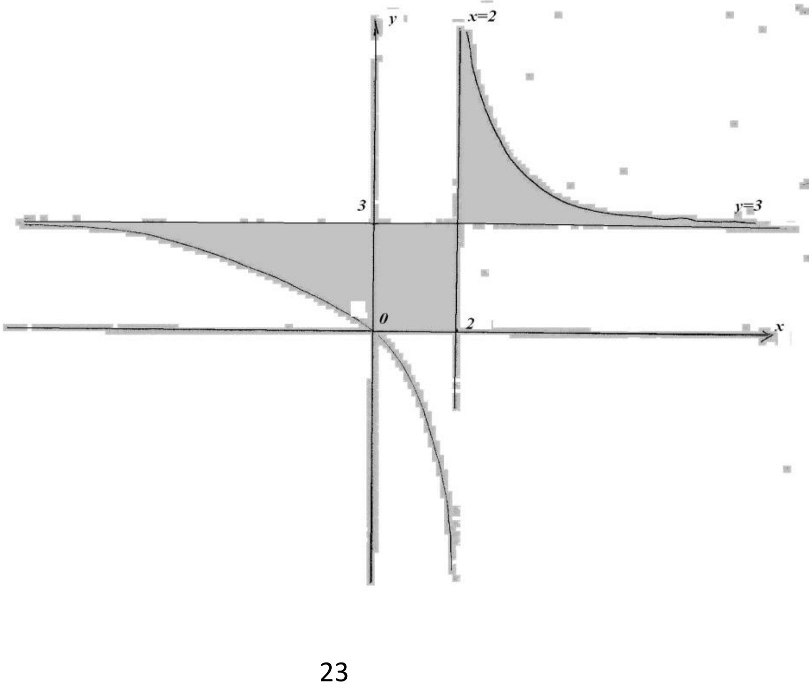
$y=3$- невертикальная асимптота.

3) Найдем точки пересечения графика с осями координат:

а) с осью oy: $y(0)=\frac{3*0}{0-2}=0$;

б) с осью ox: $\frac{3x}{x-2}=0 \Rightarrow x=0$.

График проходит через начало координат.



Список используемой литературы

1.) В.А. Кудрявцев и Б.П. Демидович; Краткий курс высшей математики; Москва, 2002 г.

2.) Г.М. Фихтегольц; Основы математического анализа, часть 2, физматгиз, 2010 г.

3.) И.И. Валуце, Г.Д. Дилигул, Математика для техникумов, Москва, «Наука», 2005 г.

4.) Г.И. Закорожец; Руководство к решению задач по математическому анализу; «Высшая школа», 2006 г.