Министерство образования Тверской области

ГБПОУ «Тверской колледж им. А.Н. Коняева»

Учебное пособие для студентов по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия». Тема «Линейная алгебра»

г. Тверь

2015

ОДОБРЕНА	УТВЕРЖДАЮ
предметной /цикловой/ комиссией	заместитель директора по учебной и научно-методической работе
«___»_______________20___г.	______________ Н.С.Лукина
Протокол №_________	«____» ____________20____г.
Председатель предметной /цикловой/комиссии	

Разработал (а) преподаватель
Лабудина Ирина Алексеевна

Цель пособия: Недостаток учебной литературы по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» вызывает трудности у студентов в усвоении предмета. Особенно много проблем возникает у студентов, которые пропускают занятия. Учебники по данному предмету или очень трудны для студентов, или не освещают полностью изучаемый материал. Данное пособие написано по действующей программе курса, приведены примеры решения задач, освещен необходимый теоретический материал. Учебное пособие по теме «Линейная алгебра» поможет студентам в усвоении данной темы, а так же преподавателя в подготовке к занятиям.

Матрицы. Действия над матрицами.

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную Таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m4} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента a_{ij} первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j – номер столбца. Сокращенно прямоугольную матрицу типа m*n можно записать так: A=(a_{ij}).

Виды матриц.

1. Прямоугольная - если число строк матрицы не равно числу столбцов (m$\neq n$).

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Данные матрицы являются прямоугольными, так как в первом примере m=2, а n=3; во втором – m=3, а n=2.

2. Квадратная – если число строк равно числу столбцов (m=n).

1) $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) Данные матрицы являются квадратными, так как в первом примере m=n=2, а во втором m=n=3.

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется её порядком.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n4} \end{pmatrix}$$

побочная

главная

Диагональ, содержащую элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, будем называть главной, а диагональ, содержащую элементы $a_{n1}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$ – побочной (или вспомогательной).

Среди Квадратных матриц выделим матрицы, у которых отличны от нуля только элементы, находящиеся на главной диагонали:

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Такие матрицы называются диагональными, например матрицы

A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Если у диагональной матрицы все числа главной диагонали равны между собой, то есть $a_{11} = a_{22} =\ldots= a_{nn}$, то такая диагональная матрица называется скалярной. Если в скалярной матрице все числа главной диагонали равны единице, то матрица называется единичной и обозначается буквой E:

E=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. В прямоугольной матрице типа m*n возможен случай, когда m=1. При этом получается матрица-строка:

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

В случае, когда n=1, получаем матрицу-столбец:

B=$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Такие матрицы-строки и матрицы-столбцы иначе будем называть векторами.

4. Равенство матриц.

Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковое строение и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$.

Так матрицы A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ равны (A=B), если $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \dots, a_{23} = b_{23}$.

5. Транспонированная матрица.

Если в матрице типа m*n, имеющей вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Переставить строки со столбцами, получим матрицу типа n*m, которую будем называть транспонированной матрицей:

$$A^{T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Тогда $A^{T}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Линейные операции над матрицами.

1. Суммой (разностью) матриц А и В условимся называть такую матрицу, элементы4 которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц А и В. Складывать (вычитать) можно только матрицы, имеющие одинаковое строение. Найти сумму и разность матриц А и В.

Пример 1.

$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 4+5 & -3+(-6) \\ 2+7 & 1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 4-5 & -3-(-6) \\ 2-7 & 1-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример 2.

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A+B=$\begin{pmatrix} 1+2 & 2+(-4) & -3+1 \\ 2+3 & -4+0 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

A-B=$\begin{pmatrix} 1-2 & 2-(-4) & -3-1 \\ 2-3 & -4-0 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Пример 3.

A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Эти матрицы сложить нельзя, так как они имеют разное строение.

2. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы А на число К называется такая матрица КА, каждый элемент которой равен Кa_{ij}. Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример.

Умножить матрицу А=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$на число К=3

Решение:

3А=$\begin{pmatrix} 2*3 & (-1)*3 & 4*3 \\ 0*3 & 5*3 & (-3)*3 \\ (-2)*3 & 1*3 & 0*3 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

3. Умножение матриц.

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка.

Пусть А=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Произведением этих матриц называется матрица

С=А*В=$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

Чтобы найти элемент C_{11} первой строки и первого столбца матрицы С, **нужно каждый элемент первой строки матрицы А (то есть $\boldsymbol{a_{11}}$ *и* $\boldsymbol{a_{12}}$)**

умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (то есть b_{11} и b_{12}) и полученные произведения сложить: $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$; чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы C, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить: $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$; аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22}.

Вообще, чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы-произведения, нужно все элементы i-й строки ($a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$) матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца ($b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$) матрицы B и полученные произведения сложить.

Пример. Найти произведения матриц A и B, если

A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение.

A*B= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*1+1*2+1*1 & 3*1+1*(-1)1*0 & 3*(-1)+1*1+1*1 \\ 3*1+1*2+2*1 & 3*1+1*(-1)+2*0 & 3*(-1)+1*1+2*1 \\ 1*1+2*2+3*1 & 1*1+2*(-1)+3*0 & 1*(-1)+2*1+3*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц.

Пример.

A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A*B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}0*3+(-1)*2+2*1 & 0*1+(-1)*1+2*0\\ 2*3+1*2+1*1 & 2*1+1*1+1*0\\ 3*3+0*2+1*1 & 3*1+0*1+1*0\\ 3*3+7*2+1*1 & 3*1+7*1+1*0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 9 & 3\\ 10 & 3\\ 24 & 10\end{pmatrix}$$

Если в этом примере попытаемся найти произведение B*A, то убедимся, что это невозможно. Для прямоугольных матриц справедливы следующие правила:

1) Умножение матрицы A на матрицу B имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;
2) В результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк , сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Упражнение. Найти A*B-B*A, где

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Ответ: A*B-B*A=$\begin{pmatrix}6 & -4 & -5\\ 6 & -2 & -4\\ 9 & 5 & -4\end{pmatrix}$.

Определители матриц.

Определители второго порядка.

Пусть дана квадратная матрица второго порядка: A=$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число Δ= $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Определитель второго порядка записывается так:

Δ=$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$=$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Примеры.

1) Δ=$\begin{vmatrix}2 & 5\\ -3 & -4\end{vmatrix}$=2*(-4)-5*(-3)=7

2) $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$=(-1)*2-4*5=-22

Применение определителей для решения системы линейных уравнений.

Пусть дана система двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} * x + a_{12} * y = b_1 \\ a_{21} * x + a_{22} * y = b_2 \end{cases}$$

Для ее решения необходимо:

1. Составить и вычислить из коэффициентов при неизвестных определитель системы:

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

2. Составить и вычислить определители для неизвестных x и y:

$\Delta_x= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

3. Найти неизвестные x и y:

x=$\frac{\Delta_x}{\Delta}$, y=$\frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Эти формулы получили название – формулы Крамера.

Исследование решения системы:

1) Если $\Delta \neq 0$, то система имеет одно решение.
2) Если $\Delta=0$, то:

а) если или $\Delta_x \neq 0$, или $\Delta_y \neq 0$, то система решения не имеет;

б) если $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет множество решений.

Пример 1.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы Δ и определители для неизвестных Δ_x *и* Δ_y:

$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$=5*(-1)-3*2=-11,

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$=12*(-1)-3*7=-33,

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$=5*7-12*2=11.

Находим значения x и y по формулам Крамера:

X=$\frac{\Delta_x}{\Delta}$=$\frac{-33}{-11}$=3, y=$\frac{\Delta_y}{\Delta}$=$\frac{11}{-11}$=-1.

Проверка.

5*3+3*(-1)=12 (верно)

2*3-1*(-1)=7 (верно)

Ответ:$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ или (3;-1).

Пример 2.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 11 \end{cases}$$

Решение. Вычислим Δ, Δ_x и Δ_y:

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$=0,

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 11 & -4 \end{vmatrix}$=2,

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 3.$

Так как Δ=0, а $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, то система не имеет решений (уравнения противоречивы).

Пример 3.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 6x - 9y = 33 \end{cases}$$

Решение. Вычислим Δ, Δ_x и Δ_y:

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$=0,

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 33 & -9 \end{vmatrix}=0,$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 33 \end{vmatrix}=0.$

Данная система имеет множество решений.

<u>Определители третьего порядка.</u>

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определителем третьего порядка, соответствующим данной матрице, называется число:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}.$$

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников (правило Сарруса). Это правило проиллюстрируем на схеме:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали ($a_{11}a_{22}a_{33}$) и элементов, находящихся на вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали ($a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{21}a_{13}a_{32}$).

Три отрицательных его члена есть произведения элементов побочной диагонали ($a_{13}a_{22}a_{31}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали ($a_{12}a_{21}a_{33}$ и $a_{11}a_{23}a_{32}$.

Пример. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$=3*5*3+1*2*4+2*3*3-1*5*3-3*3*4-2*2*3=45+8+18-15-36-12=71-63=8.

Упражнения.

Вычислить $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. Ответ: Δ=0.

Применение определений

для решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Для ее решения необходимо:

1. Составить и вычислить из коэффициентов при неизвестных определитель системы:

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2. Составить и вычислить определители для неизвестных x, y, и z:

$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

3. Найти неизвестные x, y и z по формулам Крамера:

X=$\frac{\Delta_x}{\Delta}$, y=$\frac{\Delta_y}{\Delta}$, z=$\frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы и определители для неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot(-1) + 1\cdot 5\cdot 1 + 2\cdot(-2)\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 1 - 3(-2)\cdot 1 - 5\cdot 2\cdot(-1) = 6 + 5 - 4 + 2 + 6 + 10 = 25.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-2)(-1) + 1\cdot 3\cdot 1 + 2(-2)(-2) - (-2)(-2)\cdot 1 - 3(-2)\cdot 1 - 3\cdot 2(-1) = 6 + 3 + 8 - 4 \mp 6 + 6 = 25$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 5\cdot(-2) + 3\cdot(-2)\cdot\ 1 - 1\cdot 3\cdot 1 - 3\cdot(-2)(-2) - 5\cdot 3(-1) = -9 - 10 - 6 - 3 - 12 + 15 = -25$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)(-2) + 5\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 1 - 1(-2)\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 1 - 5\cdot 2(-2) = 12 + 15 + 6 + 6 - 9 + 20 = 50$$

Находим значения x, y и z по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-25}{25} = -1 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2$$

Проверка: 3·1+2·(-1)+2=3 (верно)
5·1-2(-1)-2·2=3 (верно)
1+(-1)-2=-2 (верно)

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$ или (1;-1;2).

Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ называется такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Пример. Найти все миноры определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 18$ $\quad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11$ $\quad M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -23$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4$ $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $\quad M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -14$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -2$ $\quad M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -13$

<u>**Алгебраическим дополнением**</u> A_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Таким образом, $\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$

Пример. Найти алгебраические дополнения определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$ $\quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -19$ $\quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -14$ $\quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$

$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$ $\quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3$ $\quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.

Теорема. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя Δ на их алгебраические дополнения равна этому определителю, т.е.:

$$\Delta = \boldsymbol{a_{ij}A_{ij} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}} \quad \text{или}$$

$$\Delta = \boldsymbol{a_{ij}A_{ij} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}}$$

Пример. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

Решение. Вычислим разложением по элементам первой строки:

$\Delta = 3 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1(4+20) - 1(-2-0) + 2(4-0) = 72 + 2 + 8 = 82.$

Вычислим разложением по элементам второго столбца:

$\Delta = 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-2-0) + 2(6-0) + 4(15+2) = 2 + 12 + 68 = 82.$

Обратная матрица.

Квадратная матрица А называется вырожденной, если ее определитель равен 0, и невырожденной, если ее определитель не равен 0.

Если А – квадратная матрица, то **обратной** по отношению к А называется матрица, которая, будучи умноженной на А, дает единичную матрицу. Обозначим Обратную матрицу через A^{-1}, тогда $\boldsymbol{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E}$

Для того, что бы матрица А имела обратную, достаточно и необходимо, что бы она была невырожденной, т.е. ее определитель Δ≠0.

Для нахождения обратной матрицы используем следующую схему:

1. Находим определитель матрицы А.
2. Находим алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы А и записываем из них новую матрицу С
3. Транспонируем матрицу C^T, получаем C^T

4. Умножаем матрицу C^T *на* $\frac{1}{\Delta}$, получили $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}C^T$

5. Проверим правильность нахождения обратной матрицы, т.е. $A^{-1} \cdot A = E$.

Пример. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Решение.

1. Вычислим определитель матрицы А:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 0 + 12 + 9 - 0 - 0 = 14 \neq 0$$

2. Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Тогда новая матрица $C = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. Транспонируем полученную матрицу:

$$C^T = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Умножим полученную матрицу на $\frac{1}{14}$:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

5. Проверим полученный ответ. Имеем:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{-7+0+21}{14} & \frac{-14+14+0}{14} & \frac{-21-28+49}{14}\\ \frac{6+0-6}{14} & \frac{12+2+0}{14} & \frac{18-4-14}{14}\\ \frac{3+0-3}{14} & \frac{6-6+0}{14} & \frac{9+12-7}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

Свободные члены и неизвестные можно записать в виде матриц-столбцов.

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix},\qquad x=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Тогда, используя правило умножения матриц, эту систему уравнений можно записать так:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{33}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_2\end{pmatrix}\qquad \text{или}\qquad A\cdot X=B.$$

Это равенство называется простейшим матричным уравнением.

Такое уравнение решается следующим образом. Пусть матрица A – невырожденная (Δ≠0), тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножив на нее обе части матричного уравнения имеем: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$.
Используя сочетательный закон умножения, перепишем это равенство в виде $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1}B.\,Поскольку\,A^{-1} \cdot A = E\ и\ EX = X, находим\,X = A^{-1}B.$
Таким образом, чтобы решить систему уравнений с помощью обратной матрицы, нужно:

1) Составить матрицы A, B и X.
2) Найти обратную матрицу A^{-1}.
3) Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B, т.е. $A^{-1} \cdot B$.
4) Пользуясь определением ровных матриц, записать ответ.

Пример. Решить систему: $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$

Решение.

1. Составим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Найдем обратную матрицу A^{-1}:

Вычислим определитель матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + (-2)(-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - (-2)(-1) \cdot 4 - 3 \cdot 1(-1) = 12 - 2 + 3 - 8 = 5 \neq 0\ .$$

Найдем все алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Запишем новую матрицу $C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ и транспонируем ее:

$C^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Учитывая, что $\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{5}$, запишем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Имеем

$$x = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 15}{5} \\ \dfrac{10 \cdot 5 + 12 \cdot 0 + (-3) \cdot 15}{5} \\ \dfrac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 15}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Итак, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, т.е. x=2, y=1,z=3.

Проверка 3·2-1·1+3·0=5 (верно)
-2·2+1·1+1·3=0(верно)
2·2-1·1+4·3=15 (верно).

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ или (2;3;1).

Упражнение. Решить систему уравнений

$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + 2y + z = 23 \\ y + 2z = 13 \end{cases}$ Ответ:(4;3;5).

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

При решении систем линейных уравнений используют также метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Он состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают). Эти действия называются прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1) Умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число;
2) Сложение и вычитание уравнений;
3) Перестановку уравнений системы;
4) Исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

Пример. Используя метод Гаусса, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Решение. Переставим третье уравнение на место первого:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right) -3; -21$$

Чтобы в 1-м столбце получить $a_{21} = a_{31} = 0$, умножим 1-ю строку на -3 и сложим со второй, затем умножим 1-ю строку на -2 и сложим с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 3 \\ -8 \end{array}$$

Получим 0 вместо члена a_{32}, умножив вторую строку на 3, а третью на -8 и сложив их:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -13 & -39 \end{array}\right)$$

Полученная матрица является треугольной, расшифруем ее:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 8y - 7z = -5 \\ -13z = -39 \end{cases}$$

Выполнив обратный ход, с помощью последовательных подстановок находим неизвестные:

-13z=-39 => z=3

8y-7·z=-5 => y=-5

x-2·2+2·3=3 =>x=1.

Проверка: 3·1+2·2-3=4 (верно)

2·1-2+3·3=9 (верно)

x-2·2+2·3=3 (верно)

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ или (1;2;3).

Пример. Решить систему $\begin{cases} x - 4y - 2z = 0 \\ 3x - 5y - 6z = -21 \\ 3x + y + z = -4 \end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу и преобразуем её:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -6 & -21 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) -3$$

Умножим первую строку на-3 и сложим со второй, а затем с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -21 \\ 0 & 13 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Расшифруем вторую строку: 7y=-21 =>y=-3. Подставив вместо y -3 в третью строку, получаем 13·(-3)+7я=-4 =>z=5.

Расшифруем первую строку: x-4·(-3)-2·5=0 =>x=-2.

Ответ: $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{cases}$ или (-2;-3;5).

Однородные системы уравнений

Система линейных уравнений называется однородной, если свободные члены всех уравнений системы равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

Следует отметить, что однородная система всегда имеет решение. Очевидно, что это x=0,y=0,z=0. Это происходит, если определитель системы не равен 0 (Δ≠0), т.е. по теореме Крамера, если Δ≠0, то система имеет одно решение. Если же определитель системы равен нулю (Δ=0), то в этом случае система имеет множество решений.

Пример: Решить систему $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \\ x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 15 + 4 - 2 + 40 - 9 = 36 \neq 0.$$

Система имеет одно решение, и это решение x=y=z=0.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ 2x - 3y - 7z = 0 \\ 3x - 2y - 6z = 0 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & -7 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 18 + 4 - 105 + 9 + 14 + 60 = 0.$$

Система имеет множество решений. Найдем это решение, используя метод Гаусса. Составим расширенную матрицу и преобразуем ее в треугольную:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right)^{-2,-3} \quad => \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -13 & -9 & 0 \\ 0 & -13 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

Так как вторая и третья строки одинаковы, то одну из них исключим из системы, имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -9 & 0 \end{array}\right).$$

Одно из неизвестных, например z, примем за независимое и решим систему относительно его. Из второй строки найдем y:

$$-13y - 9z = 0 \;\;=>\;\; y = -\frac{45}{13}z - z = \frac{32}{13}z.$$

Ответ: $\begin{cases} z - \textit{независимая величина} \\ y = -\frac{9}{13}z \\ x = \frac{32}{13}z \end{cases}$

Давая разные значения z, мы получим множество решений системы.

Частные случаи решений системы (когда определитель системы равен 0)

Рассмотрим на примерах.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} 2x - y + 4z = 15 \\ 3x - y + z = 8 \\ 5x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 24 - 5 + 20 + 4 + 15 = 0.$$

Составим расширенную матрицу и, применив метод Гаусса, преобразуем её:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 15 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3,\;\; 5 \\ -2 \\ \qquad -2 \end{array} \quad => \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 15 \\ 0 & -1 & 10 & 29 \\ 0 & -1 & 10 & 65 \end{array}\right)$$

Расшифровав вторую и третью строки, получаем противоречие: -y+10z=29 и –y+10z=65. Такая система решений не имеет.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} 3x + 8y = 30 \\ 2x + 3y - z = 8 \\ x + 5y + z = 22 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 0 - 8 - 0 + 15 - 16 = 0.$$

Применим метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 0 & 30 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 22 \end{array}\right) => \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 22 \\ 3 & 8 & 0 & 30 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3; \quad -2 \\ \\ \\ \end{array} => \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 22 \\ 0 & -7 & -3 & -36 \\ 0 & -7 & -3 & -36 \end{array}\right)$$

Получаем две одинаковые строки, одну из них исключим, имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 22 \\ 0 & -7 & -3 & -36 \end{array}\right)$$

Примем z за независимую переменную, тогда из второй строки найдем y: -7y-3z=-36 => y $= \frac{-36+3z}{-7} = \frac{3z-36}{-7}$. Из первой строки найдем x: $x - \frac{5(3z-36)}{-7} + z = 22$ => 7x+15z=180-7z=−154 => 7x=-8z-334 => x $= \frac{-8z-334}{7}$

Ответ: $\begin{cases} z - \textit{независимая величина} \\ y = -\frac{3z-36}{-7} \\ x = \frac{-8z-334}{7} \end{cases}$

Упражнения. Решить системы:

1) $\begin{cases} 3x - 5y + 3z = 4 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x - 7y + 2z = 1 \end{cases}$ Ответ: система решений не имеет.

2) $\begin{cases} x - 2y + 2z = -5 \\ 2x + 2y - z = 5 \\ 7x + y - z = 10 \end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} z - \textit{независимая величина} \\ y = z + 3 \\ x = 1 \end{cases}$

Список используемой литературы

1. В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик; Математика, Москва, 2005 г., стр. 186
2. И.П. Натапсон, Краткий курс высшей математики, Москва, 2003г. стр. 174