Министерство образования Тверской области

ГБПОУ «Тверской колледж им. А.Н. Коняева»

Учебное пособие по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» для студентов второго курса

г. Тверь

2015

ОДОБРЕНА

предметной /цикловой/
комиссией
«___»_______________20___г.
Протокол №_________
Председатель предметной
/цикловой/комиссии

УТВЕРЖДАЮ

заместитель директора
по учебной и научно-
методической работе
______________ Н.С.Лукина
«____» ____________20____г.

Разработал (а) преподаватель
Лабудина Ирина Алексеевна

Данная разработка содержит теоретические основы курса математики и является дополнительным учебным пособием для студентов 2-го курса.

Целью разработки является оптимизация учебной деятельности студентов как на занятиях в аудитории, так и в процессе самоподготовки.

Содержание

Пояснительная записка

Данное учебное пособие разработано для студентов, обучающихся по специальностям «Технология машиностроения», «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта».

Пособие «Комплексные числа» составлено в соответствии с требованиями ФГОС СПО. В ходе изучения данной темы у студентов формируются следующие общие и профессиональные компетенции: ОК 4; ОК 5; ОК 8; ПК 1.4; ПК 1.5; ПК 3.2.

Недостаток учебной литературы по курсу «Элементы высшей математики» вызывают трудности в усвоение дисциплины. Особенно много проблем возникает у студентов, которые пропускают занятия. Учебники по данной теме или очень трудны для студентов, или не освещают полностью изучаемый материал. Данное пособие написано по действующей программе курса, приведены примеры решения задач, освещен необходимый теоретический материал. Учебное пособие по теме «Комплексные числа» поможет студентам в усвоение данной темы, а так же преподавателю в подготовке к занятиям.

1. Задачи, приводящие к возникновению выражения вида $a + b\sqrt{-1}$

Решая уравнения $x^2 - 2 + 2 = 0$, получаем

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1}$$

Выражения $1 + \sqrt{-1}$ и $1 - \sqrt{-1}$ мы не придумали, они возникли в процессе решения уравнения. В дальнейшем мы увидим, что в алгебре встречается и другие действия, приводящие к выражения вида $a + b\sqrt{-1}$, где a и b действительные числа. Особенность выражения $a + b\sqrt{-1}$ заключается в том что в него входит квадратный корень из минус единицы, т.е. символ $\sqrt{-1}$. Этот символ $\sqrt{-1}$ пока для нас не имеет смысла, так как квадратный корень из отрицательного числа не может равняться ни положительному, ни отрицательному числу, ни нулю, т.е. не может равняться никакому действительному числу. Отказываться изучать выражения вида $a + b\sqrt{-1}$ лишь потому, что символ $\sqrt{-1}$ не есть действительное число, означало бы допустить очень большое торможение в развитие алгебры, развития ее методов. Учение о числах вида $a + b\sqrt{-1}$ и теории, развитие на основе этого учения, оказались мощным средством, позволившим успешно решить крупнейшие теоретические и практические проблемы. Эти теории с огромным успехом применяются в электротехнике, гидромеханике, теории упругости и во многих других отделах естествознания и технике.

2. Алгебраическая формула комплексного числа.

Выражение $a + bi$, где a и b действительные числа и $i = \sqrt{-1}$ –мнимая единица, называемая комплексным числом, записанная в алгебраической форме.

Число a называется действительной частью, аbi-мнимой частью комплексного числа $a + bi$.

Комплексные числа по определению считаются равными нулю тогда и только тогда, когда $a = d = 0$.

Из этого определения следует, что комплексные числа $a + bi$ и $c + di$ равны друг другу тогда и только, когда одновременно $a =$ с и $b = d$.

Комплексные числа вида $a + 0i$ отождествляются с действительными числами, а именно считается, что $a + 0i = a$. Таким образом, любое действительное число можно рассматривать как частый случай комплексного числа. Число вида $0 + bi$ называется чисто мнимым и считается, что $0 + bi = bi$.

Два комплексных числа $a + bi$ и $a - bi$ называются <u>сопряженными.</u>

<u>3. Геометрическое изображение комплексных чисел.</u>

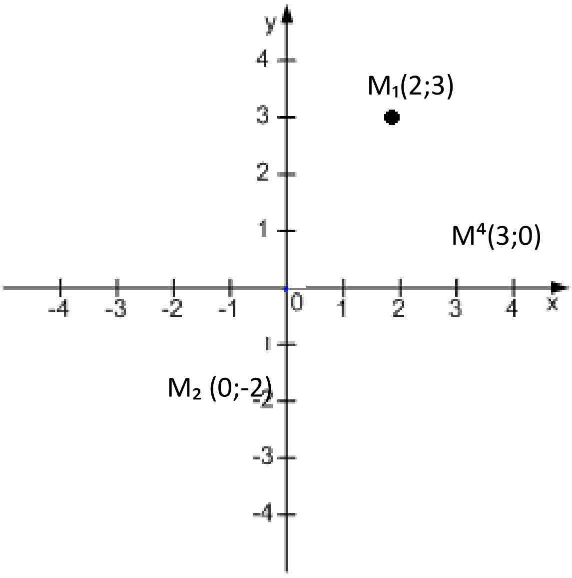
Каждому комплексному числу $z = a + bi$ соответствует единственная пара действительных чисел (a;b), которую можно изобразить в виде точки$M(a; b)$на координатной плоскости.

Примеры:

$z_1 = 2 + 3i => M_1(2; 3)$,

$z_2 = 0 - 2i => M_2(0; -2)$,

$z_3 = 3 => M_3(3; 0)$.



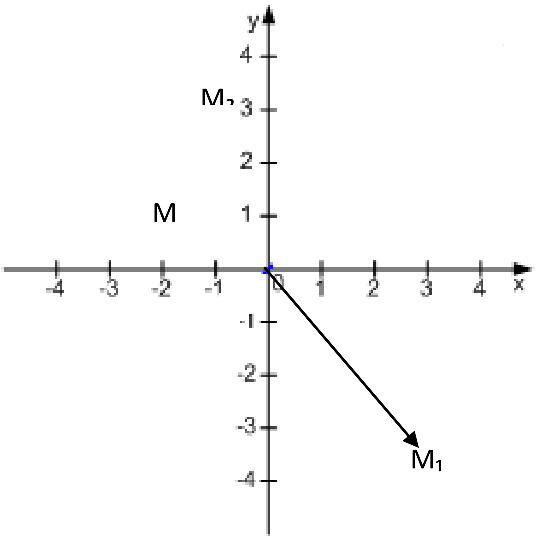
Так как каждой точки координатной плоскости соответствует единственный радиус-вектор, то можно дать комплексным числом и другую геометрическую интерпретацию: каждое комплексное число будет изображаться вектором, лежащим в координатной плоскости.

Примеры:

$z_1 = 3 - 2i \Leftrightarrow M_1(3; -2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}_1 = (3; -2)$

$z_2 = 4i \Leftrightarrow M_2(0; 4) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}_2 = (0; 4)$

$z_3 = -2 \Leftrightarrow M_3(-2; 0) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}_3 = (-2; 0)$



4. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

1. Степени мнимой единицы.

$i^1 = \sqrt{-1}$, $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$, $i^3 = i^2 * i = -i$, $i^4 = i^2 * i^2 = (-1) * (-1) = 1$

Так как единица в любой степени равна единицы, то $i^{4\text{n}} = 1$. Поэтому $i^{39} = i^{36} * i^3 = 1 * (-i) = -i$, (3 остаток отделения числа 39 на 4);$i^{726} = i^2 = -1$ (3остаток от деления числа 726 на 4) и т.д.

2. Сложение комплексных чисел.

Определение: Суммой комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$называют комплексное число (a+c)+(b+d)i. Это определение подсказывается правилами действий с обычными многочленами.

Пример № 1. $(-3 + 5i) + (4 - 8i) = -3 + 5i + 4 - 8i = 1 - 3i.$

Пример № 2. $(-7 + 2i) + 3i + (4 - 5i) + 2i = -7 + 2i + 3i + 4 - 5i + 2i = 3 + 2i.$

3. Вычитание комплексных чисел.

Определение:Разностью комплексных чисел a+biи c+diназывается комплексное число (a-c)+(b-d)i.

Пример № 1. $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = -5 + 2i - 3 + 5i = -8 + 7i$

Пример № 2. $(3 - 4i) - (3 + 4i) = 3 - 4i - 3 - 4i = -8i$

4. Умножение комплексных чисел.

Определение: Умножение комплексных чисел устанавливается с таким расчетом, чтобы:

1) числа a=bi и c+bi можно было перемножать, как алгебраические двухчлены.

2) число i обладает свойством $i^2 = -1$

Пример № 1. $2i * 3 = 6i$

Пример № 2. $3i*4i=12i^2=-12$(заметим, что приумножение двух чисто мнимых чисел получается действительное число);

Пример № 3. $(3 + 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 3 * 1 + 3(-\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} * 1 + 2\mathrm{i} * (-\mathrm{i}) = 3 - 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 5 - \mathrm{i}$

Пример № 4. $(3 + 2i)(3 - 2i) = 9 - 6i + 6i - 4i^2 = 9 + 4 = 13$ (заметим, что перемножались сопряженные комплексные числа, в результате чего получили действительное число);

Пример № 5. При перемножение комплексных чисел можно использовать формулы сокращенного умножения:

1) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$;

2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

a)$(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$;

b) $(4 + i)^2 = 16 + 8i + i^2 = 15 + 8i$;

c) $(3 - i)(3 + i) = 9 - i^2 = 10$.

5. Деление комплексных чисел.

Определение: Разделить комплексное число a+bi (делимое) на комплексное число c+di (делитель)-значит найти точное число x+yi (частное), которое, будучи помноженное на делитель, дает делимое, т.е. $\frac{a+bi}{c+di} = x + yi => (c + di)(x + yi) = a + bi$

На практике частное удобнее находить следующим образом:

Пример №1. $(7 - 4i): (3 + 2i)$.

Дробь $\frac{7-4i}{3+2i}$ умножим на число 3-2i, сопряженное знаменателю, получим:

$$\frac{(7-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{21-14i*12i+8i^2}{9-4i^2}=\frac{13-26i}{13}=1-2i$$

Пример № 2. $\frac{-2+5i}{-3-4i}=\frac{(-2+5i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}=\frac{6-8i-15i+20i^2}{9-16i^2}=\frac{-14-23i}{25}=\frac{1}{25}(-14-23i)$

Пример № 3. $\frac{5-2i}{3i}=\frac{(5-2i)i}{3i*i}=\frac{5i-2i^2}{3i^2}=\frac{2+5i}{-3}=-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i$

6. Извлечение квадратных корней из комплексных чисел.

Необходимо извлечь квадратный корень из комплексного числа $z=a+bi$, он является тоже комплексным числом, т.е. $\sqrt{a+bi}=x+y$. По определению квадратного корня имеем $(x+yi)^2=a+bi \Rightarrow x^2+2xyi+y^2i^2=a+bi$. Используя определение равенства комплексных чисел, имеем:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим действительные значения x и y . Напомним, что квадратный корень из какого-либо числа имеет два значения, т.е. $\sqrt{a+bi}=\pm(x+yi)$

Примеры:

1) $\sqrt{4}=\pm2 \Rightarrow 2^2=4$ *и* $(-2)^2=4$;

2) $\sqrt{-4}=\sqrt{4}^{(-1)}=\pm2i \Rightarrow (2i)^2=-4$ *и* $(-2)^2=-4$

3) $\sqrt{5+12i}=\pm(x+yi) \Rightarrow (x+yi)^2=5+12i \Rightarrow x^2+2xyi-y^2=5+12i$.

Используя равенство комплексных чисел, получаем :

$\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2xy=12 \end{cases}$. Решив систему уравнений, имеем x=3, y=2 (это можно сделать подбором).

Имеем, $\sqrt{5+12i}=\pm(3+2i)$. Это можно проверить: $(3+2i)^2=9+12i-4=5+12$

4) $\sqrt{-15-8i}=\pm(x+yi) \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-15 \\ xy=-4 \end{cases}$

Решение этой системы являются числа x=1, y=-4. Т.е. $\sqrt{-15-8i}=\pm(1-4i)$

7. Решение квадратных уравнений, коэффициентами в которых являются комплексные числа.

Вспомним формулу для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx^2 + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2} - 4ac}{2a}$$

Мы ее применяли для действительных коэффициентов. Она используется и для комплексных чисел.

Рассмотрим это на примерах:

1) Решить уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$

Решение: $D = b^2 - 4ac = 16 - 4 * 13 = -36 < 0$, следовательно, корнями этого уравнения являются комплексные числа. Найдем их:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36i}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Проверка: Подставим в данное уравнение вместо х комплексное число $2 + 3i$, имеем: $(2 + 3i)^2 - 4 * (2 + 3i) + 13 = 0 => 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13 = 0 =>$ равенство выполняется, следовательно, это число является корнем уравнения. Аналогично проверяется и второй корень.

2) Решим уравнение $x^2 - (5 - 2i) * x + 4 - 8i = 0$.

Коэффициентами в данном уравнение является комплексные числа: $a = 1, b = -(5 - 2i), c = 4 - 8i$. Применяем формулу корней квадратного уравнения, имеем:

$$x_{1,2} = \frac{(5 - 2i) \pm \sqrt{(5 - 2i)^2} - 4 * (4 - 8i)}{2}$$
$$= \frac{(5 - 2i) \pm \sqrt{25 - 30i - 4 - 16 + 32i}}{2} = \frac{(5 - 2i) \pm \sqrt{5 + 12i}}{2}$$

Извлечем квадратный корень из числа $5 + 12i$; $\sqrt{5 + 12i} = \pm(x + yi) =>$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} => x = 3, y = 2, т.е.$$

$\sqrt{5 + 12i} = \pm(3 + 2i)$.

Получаем: $x_1 = \frac{(5-2i)+(3+2i)}{2} = 4, x_2 = \frac{(5-2i)-(3-2i)}{2} = 1 - 2i$

3) Решим уравнение $x^2 - (3-2i) * x + 5 - i = 0$.

Находим дискриминант $D = b^2 - 4ac = (3-2i)^2 - 4(5-i) = 9 - 12i - 4 - 20 + 4i = -15 - 8i$.

Извлекаем корень из числа $\sqrt{15-8i} = \pm(x+yi) =>$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ xy = -4 \end{cases}$$

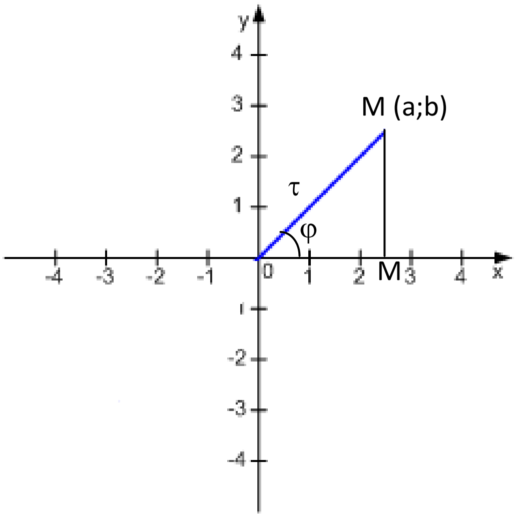
Подбором находим, что $x = 1, y = -4, т.е. \sqrt{-15-8i} = \pm(1-4i)$.

Вычисляем корни уравнения:

$$x_1 = \frac{3-2i+1-4i}{2} = 2-3i, x_2 = \frac{3-2i-1+4i}{2} = 1+i$$

8. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Комплексному числу $z = a + bi$ в прямоугольной системе координат соответствует единственная точка $M(a;b)$и единственный радиус-вектор $\overrightarrow{OM} = (a;b)$.



Положение точки M(вектора ОМ) на плоскости может быть задано полярными координатами $(\varphi;\tau)$. Если точке $M(\varphi;\tau)$ соответствует комплексное число $z = a + bi$ то τ называется модулем и обозначается: $\tau = |z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Угол φ называется аргументом числа z и обозначается$\varphi = a\tau gz$: $\varphi = a\tau ctg\frac{b}{a}$.

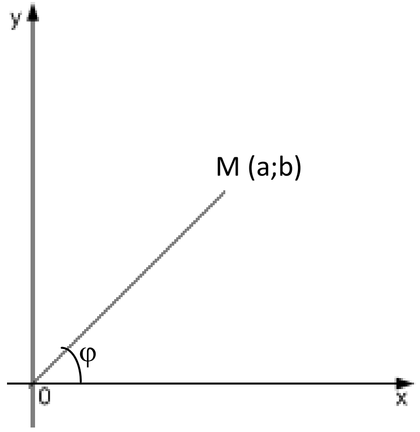
Известны τ и φ, то ΔOMN находим, что a=rcosφ и b=r*sinφ . Следовательно, $z = a + bi = r * \cos\varphi + ir * \sin\varphi = r * (\cos\varphi + i * \sin\varphi)$- такая форма записи комплексного числа называется тригонометрической.

Если комплексное число $z = a + bi$ дано в алгебраической форме, то его легко изобразить геометрически, т.е. определить четверть, в которой находится вектор.

1). Вычисляем модуль $z = \sqrt{a^2 + b^2}$

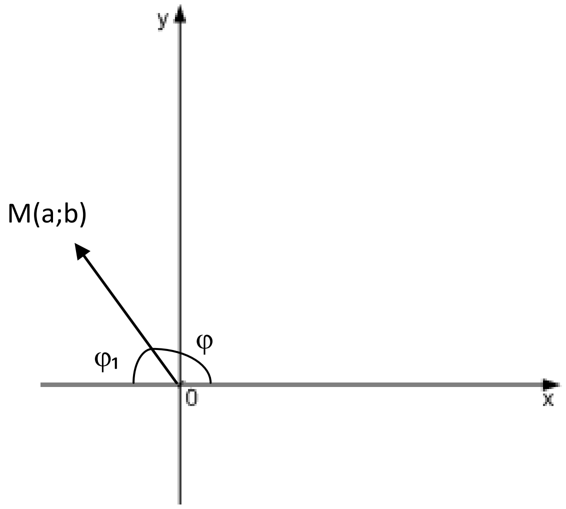
2). В зависимости от четверти, в которой расположен вектор, аргумент φ определяется следующим образом:

а)



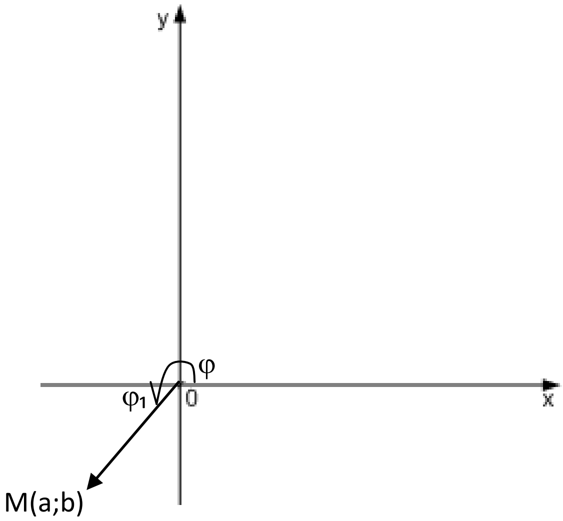
$$\varphi = arctg\left|\frac{b}{a}\right|$$

б)

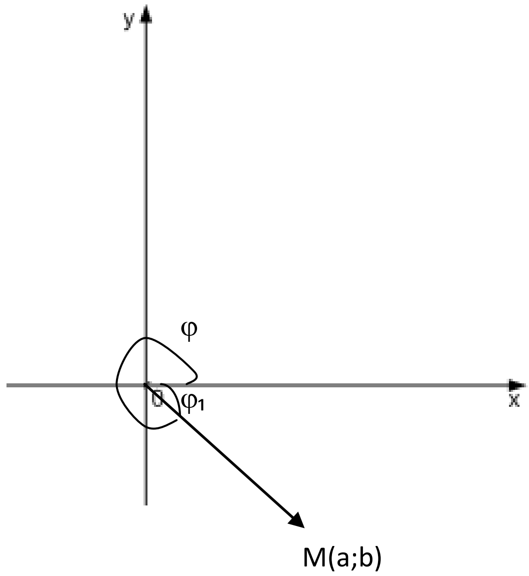


$$\varphi = 180^\circ - \varphi_1 = 180^\circ - arctg\left|\frac{b}{a}\right|$$

в)



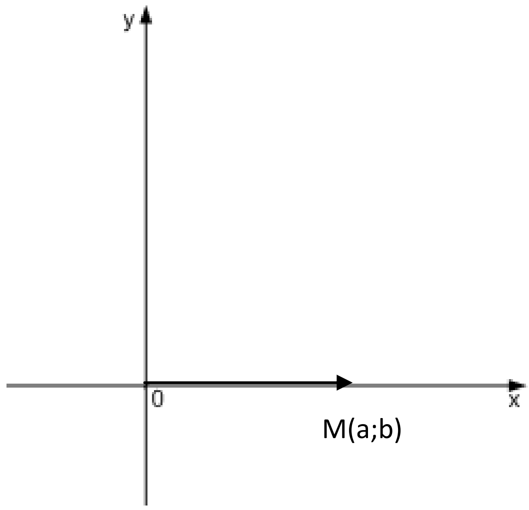
$$\varphi = 180^{\circ} + \varphi_1 = 180^{\circ} + a\tau ctg\left|\frac{b}{a}\right|$$



$$\varphi = 360^{\circ} - \varphi_1 = 360^{\circ} - a\tau ctg\left|\frac{b}{a}\right| \text{или}$$

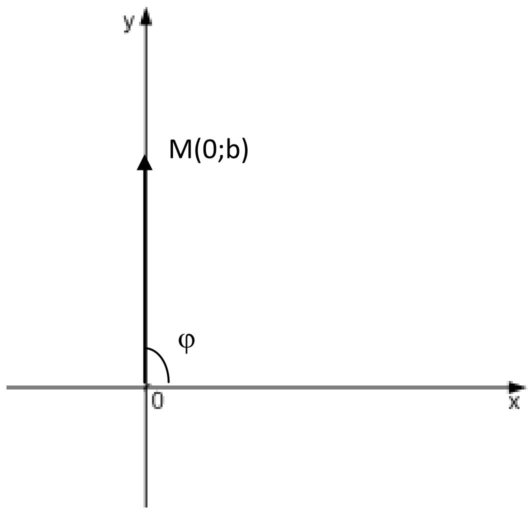
$$\varphi = -\varphi_1 = -a\tau ctg\left|\frac{b}{a}\right|$$

д)



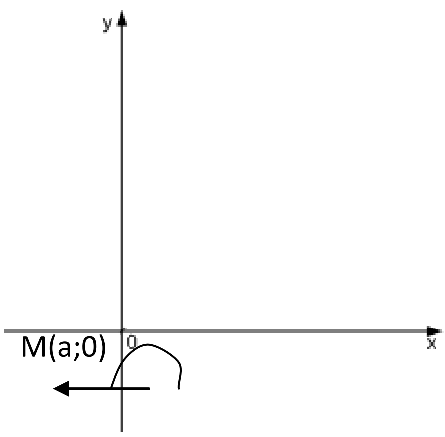
$\varphi = 0^\circ$

е)



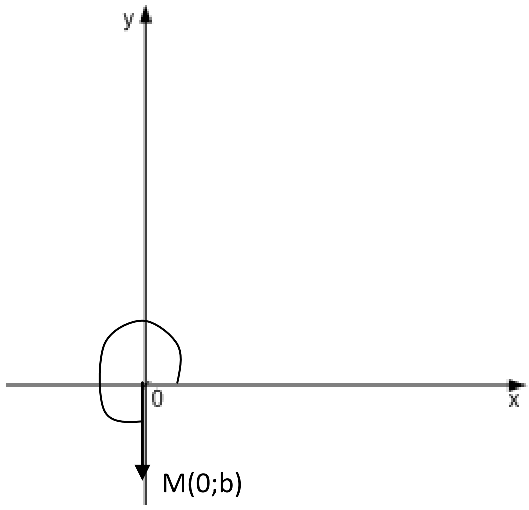
$\varphi = 90^\circ$

ж)



$\varphi = 180^\circ$

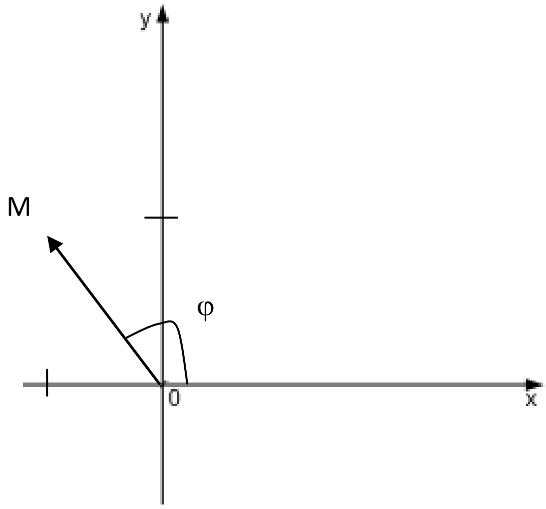
з)



$$\varphi = 270^\circ = -90^\circ$$

Примеры: Записать комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $z = -1 + i$
2) Строим точку (а затем и вектор) с координатами $M(-1; 1)$.



2) Вычислим модуль

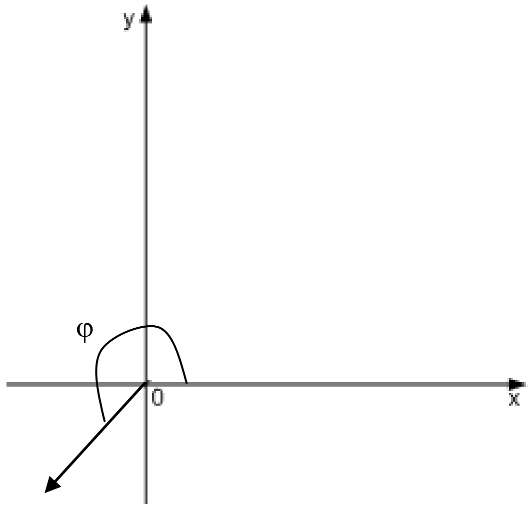
$$\tau = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

3) Вектор во второй четверти, следовательно, аргумент

$$\varphi = 180^\circ - arctg\left|\frac{1}{-1}\right| - arctg1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

имеем: $z = -1 + i = \sqrt{2(cos135^\circ + i * sin135^\circ)}.$

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

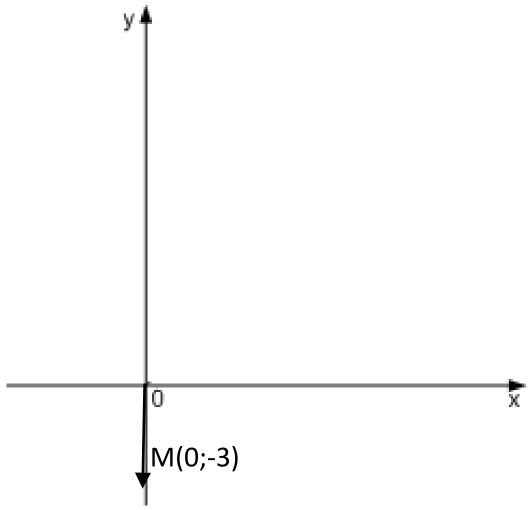


$$\tau = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\varphi = 180^\circ + a\tau ctg\left|-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 1(cos210^\circ + i * sin210^\circ)$$

3) $z = -3i$



$$\tau = \sqrt{0^2 + (-3) = 3}$$

$$\varphi = 270^\circ \text{ или } -90^\circ$$

$$z = 3(cos270^\circ + i * sin270^\circ)$$
$$= 3(\cos(-90^\circ) + i * \sin(-90^\circ))$$

9. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Даны два комплексных числа: $z_1 = \tau_1(cos\varphi_1 + I * sin\varphi_1)$и$z_2 = \tau_2(\cos\varphi_2 + i * \sin\varphi_2)$

1. <u>Умножение.</u>

$$z_1 * z_2 = \tau(cos\varphi_1 + i * \sin\varphi_1) * \tau_2(cos\varphi_2 + i * \sin\varphi_2)$$
$$= \tau_1\tau_2(cos\varphi_1 * cos\varphi_2 + cos\varphi_1 * sin\varphi_2 i + cos\varphi_2 * sin\varphi_1 * i$$
$$- sin\varphi_1 * \sin\varphi_2)$$
$$= \tau_1\tau_2\big((cos\varphi_1 * cos\varphi_2 - sin\varphi_1 * \sin\varphi_2)$$
$$+ (sin\varphi_1 * cos\varphi_2 + cos\varphi_1 * \sin\varphi_2) * i\big)$$
$$= \tau_1\tau_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i * \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

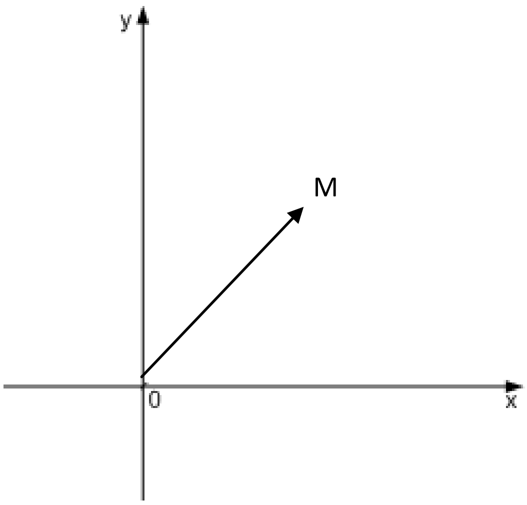
Вывод: 1). При умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются; 2). Формулы можно обобщить на любое число сомножителей.

2. <u>Возведение в степень.</u>

Если $z_1 = z_2 = \cdots z^n = \tau * (cos\varphi + i * \sin\varphi)$, то используя формулу умножения, имеем: $z^n = \big(\tau * (cos + i * \sin\varphi)\big)^n = \tau(cos\varphi^n + i * \sin\varphi^n)$

Пример № 1. Вычислить $(1 + i)^{20}$

Найдем тригонометрическую форму числа $z = 1 + i = \sqrt{2 * (cos45^\circ + i * sin45^\circ)}$



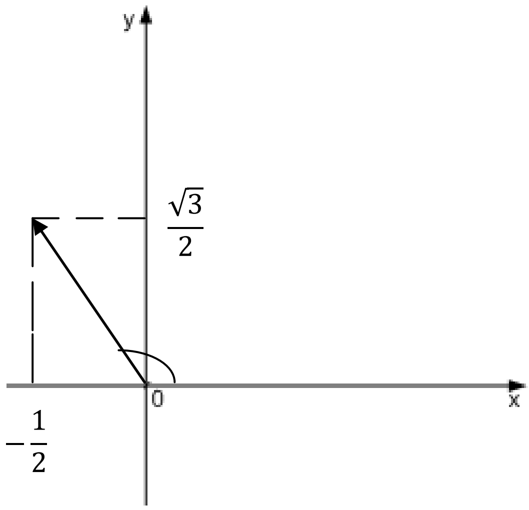
$\varphi = a\tau ctg\,\frac{1}{1}$aτctg1=45°

$$\tau = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$(1 + i)^{20} = (\sqrt{2(cos45^\circ + i * sin45^\circ))}^{20}$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 * (cos45^\circ * 20 + i * sin45 * 20)$$
$$= 2^{10}(cos900^\circ + i * sin900^\circ)$$
$$= 2^{10}(\cos(2 * 360^\circ + 180^\circ) + i * \sin(2 * 360^\circ + 180^\circ))$$
$$= 2^{10}(cos180^\circ + i * sin180^\circ) = -2^{10}$$

Пример 2. Вычислить $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

Найдем тригонометрическую форму числа: $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=cos120^{\circ}+i*sin120^{\circ}$



$$\tau=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}}=1$$

$$\varphi=180^{\circ}-a\tau ctg\left|\frac{\sqrt{3}}{2}:-\frac{1}{2}\right|$$
$$=180^{\circ}-a\tau ctg\sqrt{3}=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}=(cos120^{\circ}+i*sin120^{\circ})^{12}=cos120^{\circ}*12+i*sin120^{\circ}*12$$
$$=cos1440^{\circ}+i*sin1440^{\circ}=cos4*360^{\circ}+i*sin4*360^{\circ}$$
$$=cos0^{\circ}+i*sin0^{\circ}=1$$

3. <u>Деление.</u>

$$\frac{z^{1}}{z^{2}}=\frac{\tau_1(cos\varphi_1+i*\sin\varphi_{\ 1})}{\tau_2(cos\varphi_2+i*\sin\varphi_{\ 2})}=\frac{\tau^{1}}{\tau^{2}}*\frac{(cos\varphi_1+i*\sin\varphi^{1})(cos\varphi_2-i*\sin\varphi^{2})}{(cos\varphi_2+i*\sin\varphi^{2})(cos\varphi_2-i*\sin\varphi^{2})}$$
$$=\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{(cos\varphi_1*cos\varphi_2+sin\varphi_1*\sin\varphi_2)+(sin\varphi_1*cos\varphi_2-cos\varphi_1*\sin\varphi_2)i}{cos^{2}\varphi_2+sin^{2}\varphi_1}$$
$$=\frac{\tau_1}{\tau_2}*(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i*\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Вывод: при деление двух комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

10. Извлечение корня из комплексного числа.

Определение. Корнем n-ой степени, $u \in N, n \geq 2,$ из числа z называется любое комплексное число u, для которого $u^n = z$.

Операция нахождения всех корней n-ой из комплексного числа z называется извлечением корня и результат ее обозначается $\sqrt[n]{z}$.

Заметим, что корень n-ой степени имеет n различных значений (это утверждение применимо без доказательства.)

Пусть: $z = a + bi = \tau(cos\varphi + i * sin\varphi) = \tau(\cos(\varphi + 2\pi k) + i * \sin(\varphi + 2\pi k))$. Последняя запись называется полной тригонометрической формой комплексного числа, т.к. если к аргументу прибавить целое число, то значение функций sinbcosne меняется.)

Поэтому:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i * \sin(\varphi + 2\pi k)} = \sqrt[n]{r * \left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i * sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}$$

Давая для k значения от 0 до n-1 (k=0,1,2,3….,n-1), получаем n значений $\sqrt[n]{z}$

Пример № 1. Найти $\sqrt[4]{1}$

Корень имеет 4 значения (два из них мы знаем, что ± 1), найдем все 4 значения. Запишем $z = 1$ в тригонометрической форме:

$$1 = 1 * (cos2\pi k + isin2\pi k)$$

Имеем: $\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1(сщы2\pi л + i * sin2\pi k)} = \sqrt[4]{1} * \left(cos\frac{2\pi k}{4} + i * sin\frac{2\pi k}{4}\right)$

Пологая $k = 0,1,2,3,$ *получим*:

$$u_0 = cos0^\circ + i * sin0^\circ = 1$$

$$u_1 = cos\frac{\pi}{2} + i * sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$u_2 = cos\pi + i * sin\pi = -1$$

$$u = cos\frac{3\pi}{2} + i * sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Пример № 2. Найти $\sqrt[3]{i}$

Заменим число z=I в тригонометрической форме:

$$i = 1 * (cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i * sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right))$$

Имеем :$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1 * (cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) + i * sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)} = 1 * \left(cos * \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i * sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)$

Пологая $k = 0,1,2,$ *получим*

$$u_0 = cos\frac{\pi}{6} + i * sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3 + i})$$

$$u_1 = cos\frac{5}{6}\pi + i * sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3 + i})$$

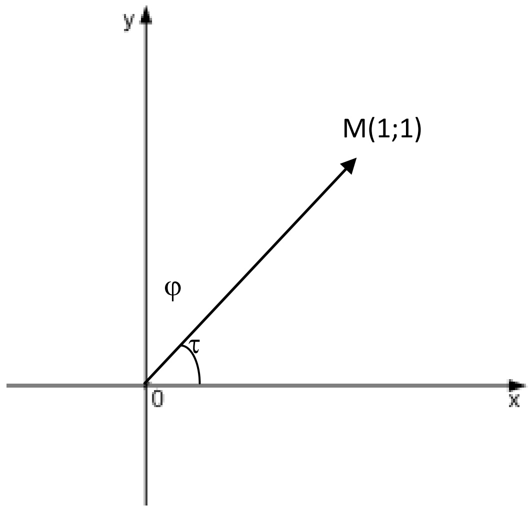
$$u = cos\frac{3}{2}\pi + i * sin\frac{3}{2}\pi = 0 - i = -i$$

11. Показательная форма комплексного числа.

Формула Эйлера устанавливает зависимость между тригонометрической формой комплексного числа $z = cos\varphi + i * sin\varphi$ с показательным выражением $1^{i\varphi}$, т.е. $cos\varphi + i * sin\varphi = 1^{i\varphi}$ (обоснование этой формулы дается в теории рядов).

Имеем: $z = a + bi = \tau(cos\varphi + i * sin\varphi) = \tau 1^{i\varphi}$.

Последняя запись называется показательной формой комплексного числа. Она удобна при выполнении ряда операцией над комплексными числами. Пример № 1. Найти показательную форму числа $z = 1 + i$

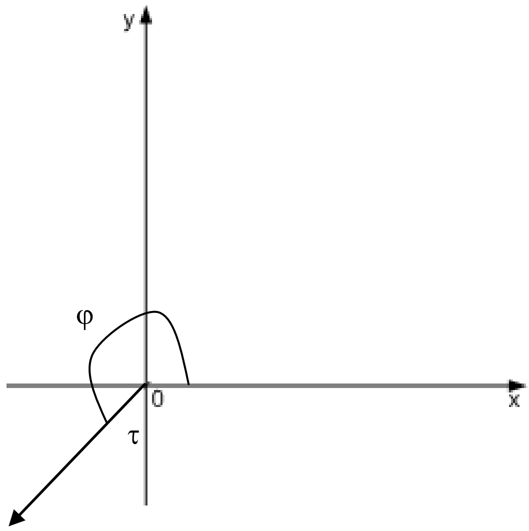


$$z = \sqrt{a^2 + b^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}}$$

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg1 = \frac{\pi}{4}=45^\circ$$

Имеем: $z = 1 + i = \sqrt{2(cos\frac{\pi}{4} + i * sin\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2 * 1^{\frac{\pi * i}{4}}}$

Пример № 2. Найти показательную форму числа $z = -\sqrt{3 - i}$



$$\tau = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\varphi = \pi + arctg\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi = 210^{\circ}$$

$$z = -\sqrt{3 - i} = 2(cos210^{\circ} + i * sin210^{\circ}) = 2 * l^{210^{\circ}} = 2l^{\frac{7}{6\pi i}}$$

Список используемых источников

1. И.И Валуце, Г.Д. Дилигун. Математика для техникумов. Москва, «Наука»,1999 г., стр. 150
2. С.И. Туманов. Элементарная алгебра. Учнедгиз, 2001г. стр. 204
3. Алгебра и начала анализы часть 2, под редакцией Г.Н. Яковлева. Маска, Наука, 2011г., стр. 401