

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ТВЕРСКОЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. А.Н.КОНЯЕВА»

Методическая разработка
урока
по дисциплине
«Элементы высшей математики»

Тема занятия: «Матрицы. Операции над матрицами»

Преподаватель: Бодров Е.Н.

Тверь
2017

План занятия

1. **Дисциплина** – Элементы высшей математики
2. **Курс** – 2 (специальность 09.02.03 Программирование в компьютерных системах).
3. **Тема:** Матрицы. Операции над матрицами.
4. **Тип урока** – урок обобщения и систематизации знаний.
5. **Цели занятия:**
 - 1) **Образовательная:** систематизировать материал по теме; совершенствовать умение выполнять операции над матрицами; применить знания и умения, полученные на дисциплине «Информатика», при решении математических задач.
 - 2) **Развивающая:** речь, память, внимание, мышление.
 - 3) **Воспитательная:** самостоятельность, аккуратность, целеустремленность, дисциплинированность.
6. **Форма обучения:** групповая, индивидуальная, фронтальная.
7. **Методы обучения:** словесные (беседа, рассказ, инструктаж); наглядные (демонстрация презентации); практические (решение задач, работа с литературой); интерактивные (исследовательский метод).
8. **Средства обучения:** доска, мел, презентация, учебники, ТСО: компьютер для преподавателя с проектором; компьютеры для студентов (студенты работают в парах), раздаточные материалы.
9. **Межпредметные связи:** Элементы высшей математики – Информатика; Элементы высшей математики – Программирование.
10. **Список используемой литературы:**
 1. Баврин, И.И. Курс высшей математики / И.И. Баврин – М.: ВЛАДОС, 2008. – 560 с.
 2. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479 с.
 3. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Практикум / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 484 с.
 4. ФГОС СПО по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах, утвержден приказом Министерства образования и науки РФ № 804 от 28.07.2014.

Структура занятия

Элементы занятия	Время (мин.)
1. Организационный момент (взаимное приветствие, контроль присутствия).	3
2. Сообщение цели и темы урока. Самоопределение.	5
3. Повторение, обобщение и систематизация отдельных фактов.	12
4. Проверочная работа.	20
5. Самостоятельная работа в группах.	40
6. Этап информирования студентов о домашнем задании, инструктаж по его выполнению.	5
7. Подведение итога занятия.	5
Итого	90 минут

Технологическая карта занятия

№ п/п	Содержание этапа	Деятельность преподавателя	Деятельность студента	Методы и формы обучения
1.	Организационный этап. Приветствие, настрой на работу.	– приветствие студентов; – фиксирование отсутствующих; – организация внимания студентов; – проверка готовности обучающихся к занятию.	– приветствие преподавателя; – настраивание на активную работу; – включение обучающихся в деловой ритм.	Словесный метод.
2.	Сообщение цели и темы урока. Самоопределение.	– формулировка цели; – оценка значимости для студентов нового материала; – постановка перед обучающимися учебной проблемы.	– понимание студентами практической значимости материала.	Словесный метод (инструктаж).
3.	Повторение, обобщение и систематизация отдельных фактов.	– консультирование; – дать конкретные представления об изучаемых фактах, основной идее изучаемого вопроса, правилах и законах.	– повторение студентами материала.	Словесный метод (объяснение). Наглядный метод (демонстрация презентации). Работа с литературой.
4.	Проверочная работа.	– консультирование; – установка уровня усвоения содержания знаний, закономерностей; – устранение обнаруженных пробелов.	– самостоятельное решение задач; – решение нестандартных ситуаций при использовании знаний.	Словесный метод (разъяснение). Практический метод (решение задач, выполнение упражнений).

5.	Самостоятельная работа в группах.	<ul style="list-style-type: none"> – консультирование индивидуальное; – проверка глубины понимания обучающимися учебного материала. 	<ul style="list-style-type: none"> – создание программы; – самостоятельное решение задач; – нахождение более рационального решения; - составление сопровождающей документации. 	Исследовательский метод. Работа с литературой.
6.	Этап информирования студентов о домашнем задании, инструктаж по его выполнению.	- сообщить студентами домашнее задание, разъяснить методику её выполнения.	- восприятие задания с усвоением способов его выполнения.	Словесный метод (инструктаж).
7.	Подведение итога занятия.	<ul style="list-style-type: none"> – анализ и оценка успешности достижения цели урока; – определение перспектив на будущее; – оценка работы группы и отдельных учащихся. 	<ul style="list-style-type: none"> – адекватность самооценки студентов; – стимуляция высказывания личного мнения об уроке и способах работы на нём. 	Словесный метод.

Пояснительная записка

Тема «Матрицы. Операции над матрицами» изучается в разделе «Элементы линейной алгебры» [1-2]. На данную тему отводится 8 часов аудиторной нагрузки (предложенное занятие является завершающим по теме). В ходе изучения данной темы необходимо познакомить студентов с видами матриц, операциями над матрицами, с определителями, со способами вычисления определителей, с алгоритмом поиска обратной матрицы, разобрать практическую направленность изучаемой темы. В процессе проведения занятия осуществляется формирование компетенций [4], включающих в себя способность:

- организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения задач, оценивать их эффективность и качество;
- принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность;
- осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения задач;
- использовать информационно-коммуникационные технологии в деятельности;
- работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, брать на себя ответственность за работу членов команды, за результат выполнения заданий.

Конспект урока

1. **Организационный момент** (взаимное приветствие, контроль присутствия, проверка готовности обучающихся к занятию).
2. **Сообщение цели и темы урока. Самоопределение:**

*Тема занятия «Матрицы. Операции над матрицами» (слайд презентации).
Цель занятия:*

- 1) *Образовательная: систематизировать материал по теме; совершенствовать умение выполнять операции над матрицами; применить знания и умения, полученные на дисциплине «Информатика» при решении математических задач.*

Ребята, вам дома было предложено подумать над вопросом «Где применяются матрицы?».

- в математике матрицы применяются для компактной записи и решения систем линейных уравнений или систем дифференциальных уравнений;
- матрицы имеют чрезвычайно важное значение в экономике.

Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой,

а главное – компактной матричной форме. С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости;

– в физике и других прикладных науках матрицы – являются средством записи данных и их преобразования;

– в программировании – в написании программ. Они еще называются массивами;

– широко применение и в технике. Например, любая картинка на экране – это двумерная матрица, элементами которой являются цвета точек;

– в психологии понимание термина сходно с данным термином в математике, но взамен математических объектов подразумеваются некие "психологические объекты";

– матрицы имеет широкое применение в биологии, химии и даже в маркетинге.

3. Повторение, обобщение и систематизация отдельных фактов:

Что такое матрица? (*таблица, содержащая n строк и m столбцов*).

Укажите назначение индексов элементов матрицы (*первый индекс – номер строки; второй индекс – номер столбца*).

Что такое размерность матрицы? (*$n \times m$*)

Когда матрица называется квадратной? (*$n=m$*)

Что такое главная и побочная диагональ?

Студентам предлагается слайд презентации со следующими матрицами:

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$3. A = (a_{11} \quad \dots \quad a_{1n}).$$

$$4. A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$10. A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Дайте название каждой из предложенных матриц.

(Ответ: 1- нулевая матрица; 2 – матрица, противоположная матрице A; 3 – матрица-строка; 4 – матрица-столбец; 5 – верхняя треугольная матрица; 6 – нижняя треугольная матрица; 7 – диагональная матрица; 8 – скалярная матрица; 9 – единичная матрица; 10 – обратная матрица).

Какие операции выполняются над матрицами?

- транспонирование (A^T получается из исходной матрицы, заменой строк на столбцы);
- сложение (складываются матрицы одинаковой размерности, складываются соответствующие элементы);
- умножение матрицы на число (каждый элемент матрицы умножается на число);
- умножение матриц (умножать матрицы возможно, если количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй матрицы).

Какая матрица называется обратной? ($A^{-1}A = AA^{-1} = E$)

Сформулируйте критерий существования обратной матрицы. *(квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная, то есть её определитель не равен нулю).*

Укажите этапы алгоритма поиска обратной матрицы, с помощью алгебраических дополнений *(1- найти определитель и сравнить его с нулём; 2 – найти алгебраические дополнения; 3 – составить матрицу из алгебраических дополнений и транспонировать её; 4 – найти обратную*

матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

4. Проверочная работа:

Студентам предлагается выполнить проверочную работу [3].

Проверочная работа

Тема «Матрицы. Операции над матрицами»

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, какие из следующих операций можно выполнить:

- 1) $A+B$; 2) A^T+B ; 3) $A+B^T$; 4) AB ; 5) BA ; 6) A^TB ; 7) AB^T ; 8) A^TB^T ; 9) B^TA^T .

2. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Найти AB и B^TA .

3. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C=A^3$.

4. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти определитель матрицы A .

5. Выяснить, какие из приведённых ниже матриц имеют обратные (ответ обосновать):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: 1. 4), 6), 9); 2. $AB = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix}$, $B^TA = \begin{pmatrix} -6 & -20 \end{pmatrix}$;

4. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$; 4. 77; 5. C, D.

5. Самостоятельная работа в группах:

Студентам предлагается создать проект, состоящий из:

1. Программы (созданной с помощью MS EXCEL, для матриц третьего порядка).
2. Протокола тестирования программы.
3. Руководства по эксплуатации (оформляется в виде буклета).
4. Презентации программы (презентацию студенты создают дома).

Студенты делятся на пары и работают за компьютерами.

Заказчиком программы является преподаватель, так как программа будет полезна при составлении заданий для проверочных работ.

Преподаватель играет роль консультанта. При необходимости преподаватель может предложить студентам воспользоваться справкой, созданной для функции; может провести индивидуальную консультацию; если большинство студентов испытывают затруднение при применении функции, то преподаватель, может продемонстрировать пример использования функции на своём компьютере с помощью проектора, выводя данные на экран.

На занятии студентам выдаются, следующие документы (*данная информация дублируется на слайдах презентации*):

Технологическая карта программы (проекта) (минимальные требования к программе)

Программа должна:

1. Находить определитель матрицы (*математическая функция МОПРЕД*) и выводить сообщение о том, что матрица является вырожденной или невырожденной (*логическая функция ЕСЛИ*).

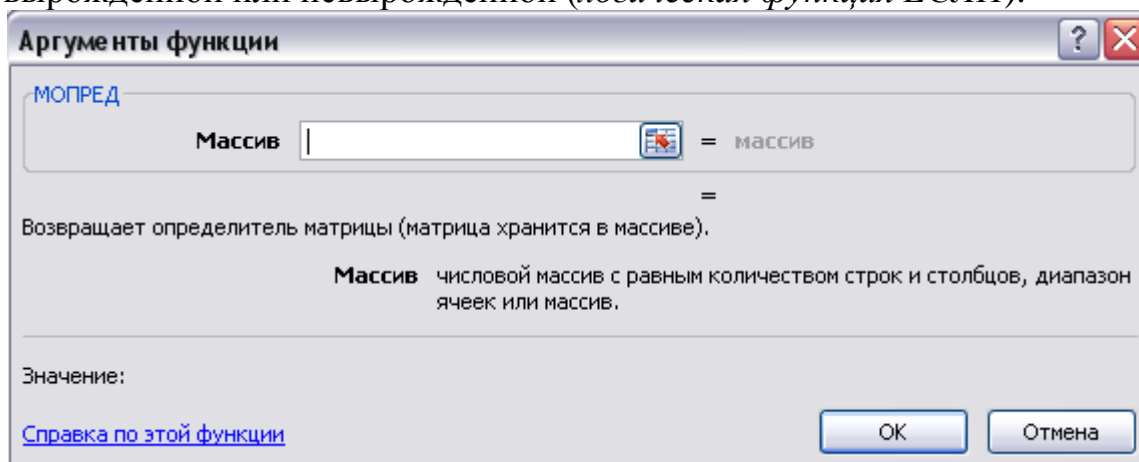


Рис. 1. Окно «Аргумент функции» математической функции МОПРЕД

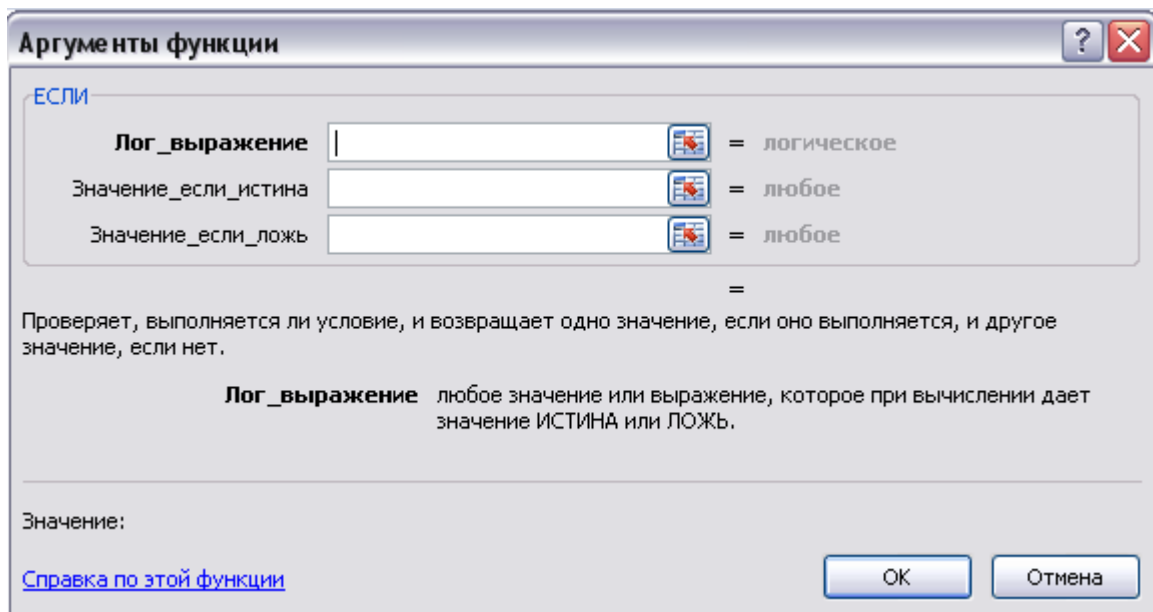


Рис. 2. Окно «Аргумент функции» для вывода сообщений логической функции ЕСЛИ

2. Выполнять операцию транспонирования матрицы.
3. Находить квадрат матрицы (*математическая функция МУМНОЖ*).

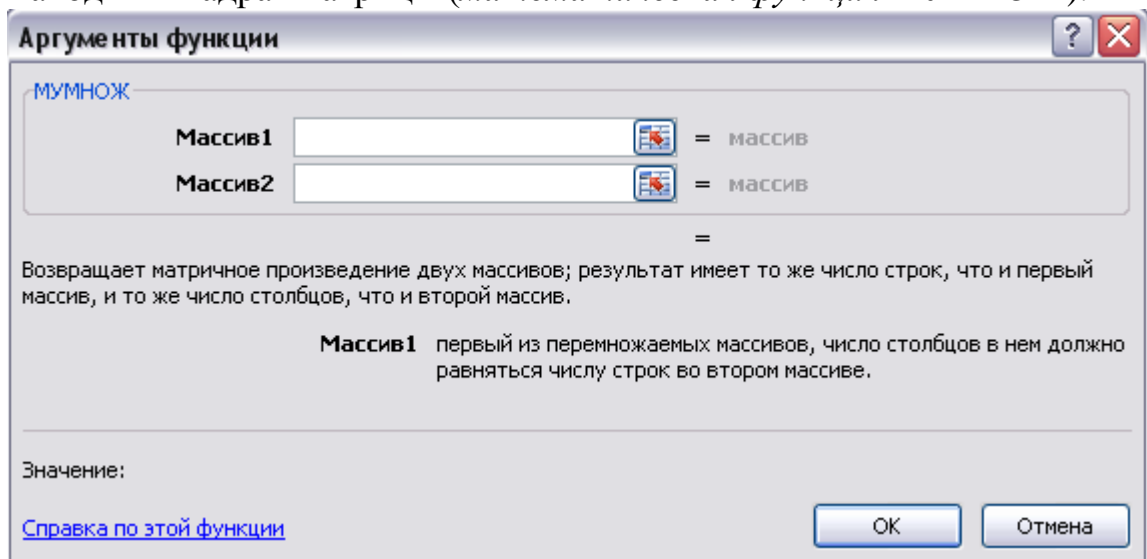


Рис. 3. Окно «Аргумент функции» математической функции МУМНОЖ.

4. Находить обратную матрицу (*математическая функция МОБР*).

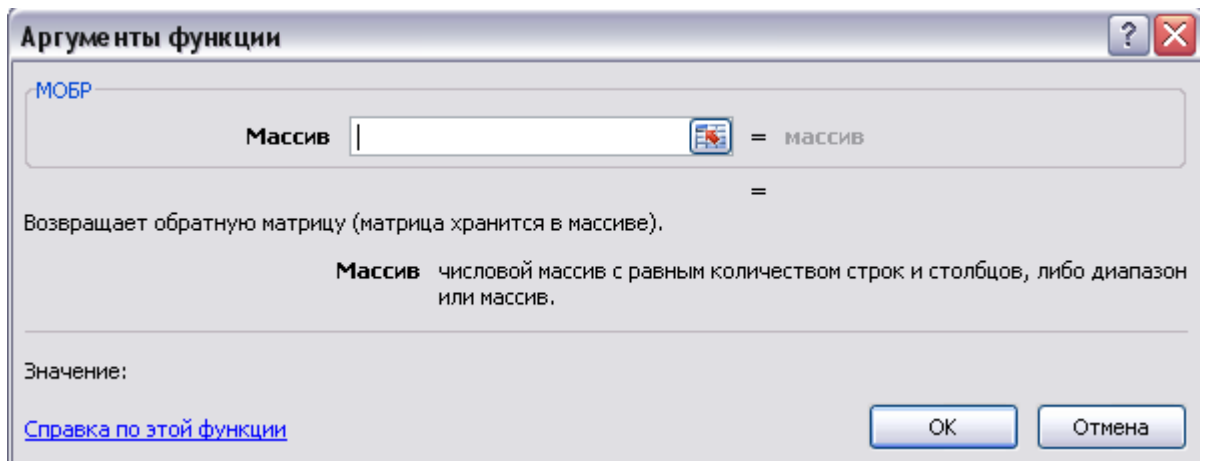


Рис. 4. Окно «Аргумент функции» математической функции МОБР

5. Перемножать матрицы (*математическая функция МУМНОЖ*).
6. Умножать матрицу на число.
7. Складывать матрицы.

Интерфейс программы разрабатывают студенты самостоятельно.

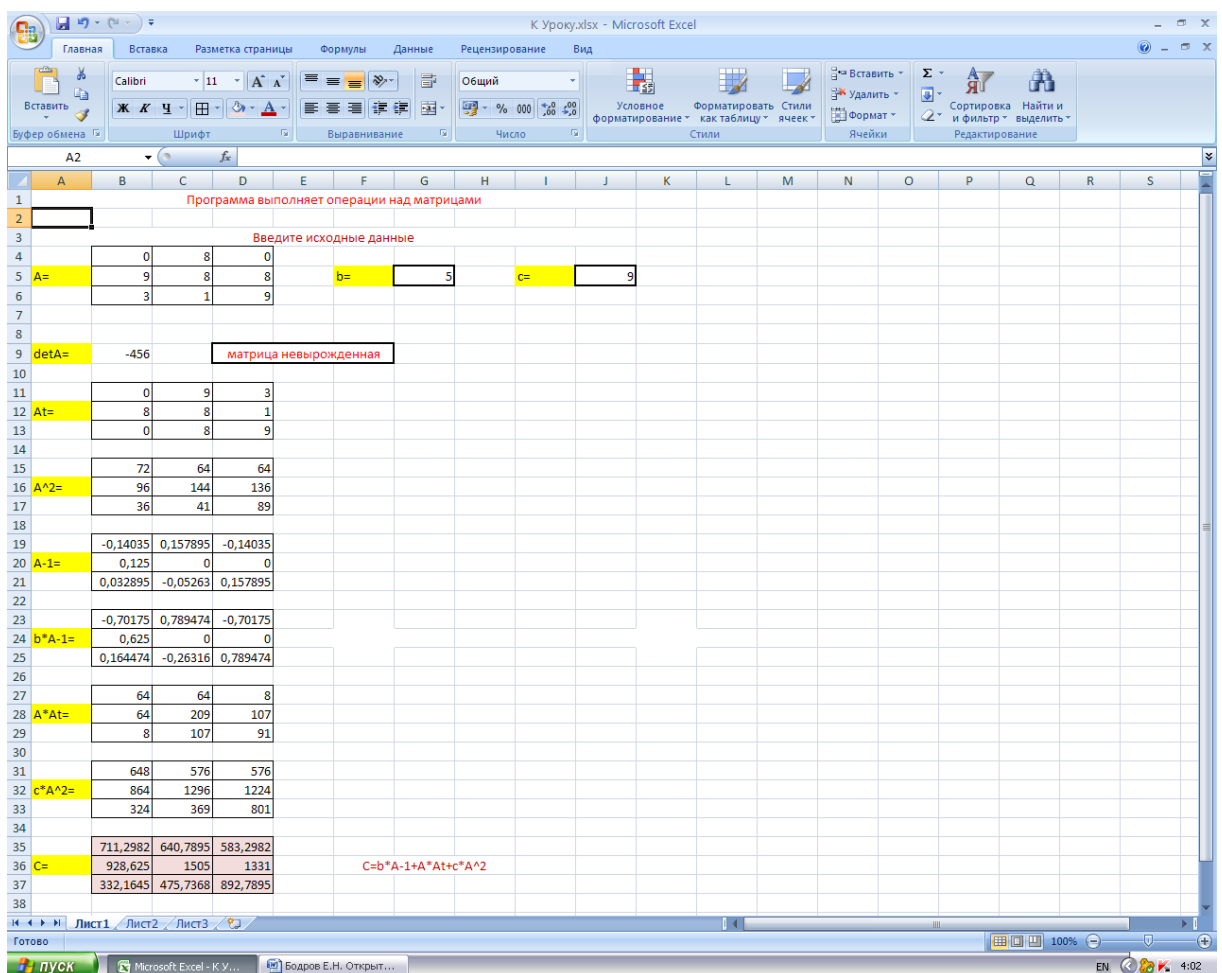


Рис. 5. Примерный вид программы

Задания для проведения тестирования программы.

Дана матрица A . Найдите $\det A$, A^T , A^2 , A^{-1} , C .

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -13 & -6 & -5 \end{pmatrix}$, $C = 6A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = 3A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $C = -32A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

4. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = 8A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = -25A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = 15A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = 5A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

8. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = 3A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = 8A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $C = -32A^{-1} + AA^T + 3A^2$.

**Протокол тестирования программы
Состав группы разработчиков программы:**

	ФИО
1	
2	

Бланк ответов

Номер примера	Ответ
1	C=
2	

	C=
3	C=
4	C=
5	C=
6	C=
7	C=
8	C=
9	C=
10	C=

ОТВЕТЫ

$$1. C = \begin{pmatrix} 259 & 50 & -118 \\ -44 & -5 & -9 \\ -332 & -69 & 163 \end{pmatrix}.$$

$$2. C = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 28 \\ 6 & 34 & -14 \\ 13 & -1 & 40 \end{pmatrix}.$$

$$3. C = \begin{pmatrix} -22 & 25 & 56 \\ 45 & 32 & -29 \\ -58 & 13 & 132 \end{pmatrix}.$$

$$4. C = \begin{pmatrix} 8 & -34 & 42 \\ 7 & 124 & -133 \\ 7 & -24 & 33 \end{pmatrix}.$$

$$5. C = \begin{pmatrix} 60 & 45 & -19 \\ -32 & 43 & 96 \\ -35 & 65 & 76 \end{pmatrix}.$$

$$6. C = \begin{pmatrix} 76 & -39 & -1 \\ -32 & 59 & -16 \\ 29 & -39 & 34 \end{pmatrix}.$$

$$7. C = \begin{pmatrix} 2 & 39 & 57 \\ -14 & 85 & 66 \\ -7 & 47 & 66 \end{pmatrix}.$$

$$8. C = \begin{pmatrix} 48 & 1 & -4 \\ 14 & 23 & 14 \\ -19 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$9. C = \begin{pmatrix} 19 & -89 & 38 \\ -11 & 121 & -34 \\ 4 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$10. C = \begin{pmatrix} -14 & 46 & -86 \\ 26 & 29 & 27 \\ 28 & -15 & 127 \end{pmatrix}.$$

Макет сопровождающего программу документа

1. Авторы программы.
2. Заказчик программы.
3. Возможности программы.
4. Руководство по эксплуатации.
5. Плюсы данной программы по сравнению с уже созданными проектами (данный пункт заполняется студентами дома, после анализа предлагаемых программ в сети «Интернет»).

6. Этап информирования студентов о домашнем задании, инструктаж по его выполнению:

Дома студенты должны подготовить презентацию своей программы (проекта).

Следующее занятие проводится в виде конференции. Каждая группа представляет конечный продукт (программу, руководство по эксплуатации (в виде буклета), протокол тестирования программы, презентацию программы). Выбираются лучшие программы, вручаются дипломы и сертификаты.

7. Подведение итога занятия:

Что такое матрица?

Какие операции выполняются над матрицами?

При каком условии существует обратная матрица?

Где применяются матрицы?

Выставление отметок.